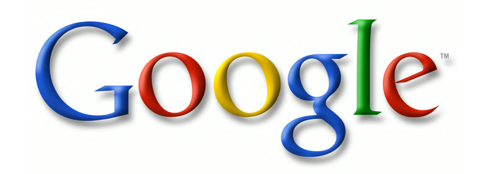
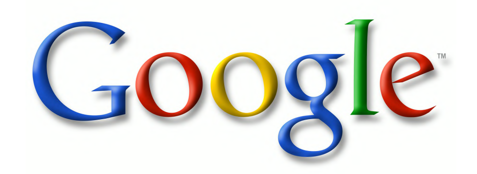
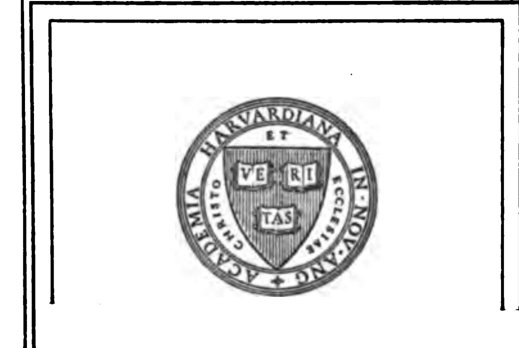







HARVARDIANA
ET
VE RI
TAS
ACADEMIA IN NOV-ANG
CHRISTO ECCLESIAE



Julian Lowell Coolidge

Balliol

[illegible]

Autumn 1899

GRUNDZÜGE

EINER

REIN GEOMETRISCHEN THEORIE DER ALGEBRAISCHEN EBENEN CURVEN.

EINE VON DER KÖNIGL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN

AM 1. JULI 1886 GEKRÖNTE PREISSCHRIFT.

VON

DR. ERNST KÖTTER.

AUS DEN ABHANDLUNGEN DER KÖNIGL. PREUSS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN VOM JAHRE 1887.

BERLIN 1887.

VERLAG DER KÖNIGL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Vorgelegt in der öffentlichen Sitzung am 1. Juli 1886.
Nach neuer Überarbeitung zum Druck eingereicht am 10. Februar 1887.
Ausgegeben am 20. December 1887.



Vorwort.

Die Königl. Preufsische Akademie der Wissenschaften zu Berlin hatte am Leibniztage des Jahres 1882 folgende Preisfrage gemäfs den Bestimmungen der Steiner'schen Stiftung gestellt:

„Die bis jetzt zur Begründung einer rein geometrischen Theorie der Curven und Flächen höherer Ordnung gemachten Versuche sind hauptsächlich deswegen wenig befriedigend, weil man sich dabei — ausdrücklich oder stillschweigend — auf Sätze gestützt hat, welche der analytischen Geometrie entlehnt sind und gröfstentheils allgemeine Gültigkeit nur bei Annahme imaginärer Elemente geometrischer Gebilde besitzen. Diesem Übelstande abzuhelfen, giebt es, wie es scheint, nur ein Mittel: es mufs der Begriff der einem geometrischen Gebilde angehörigen Elemente dergestalt erweitert werden, dafs an die Stelle der im Sinne der analytischen Geometrie einem Gebilde associirten imaginären Punkte, Geraden, Ebenen wirklich existirende Elemente treten, und dafs dann die gedachten Sätze, insbesondere die auf die Anzahl der gemeinschaftlichen Elemente mehrerer Gebilde sich beziehenden, unbedingte Geltung gewinnen und geometrisch bewiesen werden können.

Für die Curven und Flächen zweiter Ordnung hat dies von Staudt in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage" mit vollständigem Erfolge ausgeführt. Die Akademie wünscht, daſs in ähnlicher Weise auch das im Vorstehenden ausgesprochene allgemeine Problem in Angriff genommen werde, und fordert die Geometer auf, Arbeiten, welche dieses Problem zum Gegenstande haben und zur Erledigung desselben Beiträge von wesentlicher Bedeutung bringen, zur Bewerbung um den im Jahre 1884 zu ertheilenden Steiner'schen Preis einzureichen. Selbstverständlich muſs in diesen Arbeiten die Untersuchung rein geometrisch durchgeführt werden; es ist jedoch nicht nur zulässig, sondern wird auch ausdrücklich gewünscht, daſs die erhaltenen Resultate auf analytisch-geometrischem Wege erläutert und bestätigt werden."

Die einzige rechtzeitig eingelaufene Arbeit wurde am Leibniztage des Jahres 1884 beurtheilt, aber derselben der Preis nicht zugesprochen. Indessen wiederholte die Akademie die Preisfrage, forderte aber nunmehr die Hinzufügung analytischer Erläuterungen. Die folgende Arbeit, eine rein geometrische Theorie der ebenen algebraischen Curven begründend, wurde am vorjährigen Leibniztage von der Akademie des ausgesetzten Preises für würdig befunden[1]).

Der hohe Grad einfacher und sicherer Begründung der Thatsachen in der analytischen Geometrie beruht einmal darauf, daſs in die Fundamente die imaginären Gröſsen vollständig aufgenommen sind, zweitens darauf, daſs vor Eintritt in dieselbe die Theorie der ganzen Functionen einer und zweier Variablen erledigt ist. Man weiſs von vorne herein, daſs eine ganze Function einer Variablen und $n$ten Grades n im Allgemeinen verschiedene Nullstellen besitzt, und daſs zwei ganze Functionen $m$ter und $n$ter Dimension zweier Variablen mn im Allgemeinen verschiedene Werthepaare bestimmen, für die beide verschwinden.

Daraus ergiebt sich naturgemäſs eine Zerlegung des Stoffes in vier groſse Abschnitte. Der erste hat sich mit den imaginären Elementen zu beschäftigen und muſs zeigen, daſs man auch mit Rücksicht auf die imaginären Elemente derselben die Grundgebilde projectivisch resp. collinear

---

1) Es sei dem Verfasser zur Vermeidung möglicher Miſsverständnisse die Mittheilung gestattet, daſs er mit dem Verfasser der früheren Arbeit nicht identisch ist.

auf einander beziehen kann, so daſs die beiden Haupteigenschaften der projectivischen Reihen erhalten bleiben, daſs sie eindeutig bezogen und durch drei Paare entsprechender Elemente bestimmt sind. Diese Aufgabe hat bekanntlich von Staudt in seinen Beiträgen zur Geometrie der Lage vollständig gelöst, indem er die imaginäre Gerade zweiter Art zum Mittelpunkt der Darstellung machte; die Grundzüge dieser Theorie werden in der Einleitung dargelegt.

Ich biete in dem ersten Capitel meiner Arbeit (§§ 1—21) eine Behandlung der projectivischen Verhältnisse der reellen Ebene, welche allein von ihren eigenen imaginären Punkten und Geraden Gebrauch macht. Das Capitel schlieſst mit dem Nachweise ab, daſs zwei projectivische Gebilde desselben Trägers stets gemeinsame und im Allgemeinen zwei verschiedene gemeinsame Elemente haben. Die Punkte einer imaginären Geraden werden dabei durch ihre reellen Träger, die einen imaginären Punkt enthaltenden Strahlen durch ihre reellen Punkte ersetzt. Die Punkte einer reellen Geraden werden durch die reellen Punkte bestimmt, die mit ihnen und einem imaginären Punkte auſserhalb sich durch eine Gerade verbinden lassen, und die von einem reellen Punkt ausgehenden Strahlen durch die reellen Geraden, die ihre Schnittpunkte mit einer festen imaginären Geraden enthalten.

Das zweite Capitel (§§ 22—76) bietet in der Theorie der Involutionen das geometrische Ersatzmittel für die der ganzen Functionen. Wie eine unbekannte Punktgruppe durch eine Gleichung analytisch dargestellt wird, wird sie geometrisch fixirt als Coincidenzgruppe zweier projectivischer Involutionen. Eine einzelne Gruppe einer Involution $n$ter Ordnung $A_1 A_2 \dots A_n, B_1 B_2 \dots B_n$ kann als Gruppe gemeinsamer Elemente der Involutionen

$$\begin{array}{c} A_1 A_2 \dots A_{n-m}, B_1 B_2 \dots B_{n-m}, \mathfrak{C}'_1 \mathfrak{C}'_2 \dots \mathfrak{C}'_{n-m}, \dots \;\overline{\wedge}\; B_{n-m+1} \dots B_n, \\ A_{n-m+1} \dots A_n, \mathfrak{C}_{n-m+1} \dots \mathfrak{C}_n, \dots \end{array}$$

betrachtet werden. Es wird gezeigt, daſs, wenn nur $\mathfrak{C}_{n-m+1} \dots \mathfrak{C}_{n+1}$ geändert wird, die Gruppe der Involution $n$ter Ordnung als mit ihr projectivisch veränderlich bezeichnet werden kann. Es wird ferner dargelegt, daſs zwei solche Reihen stets gemeinsame Elemente und im Allgemeinen n verschiedene besitzen. Da naturgemäſs der Schluſs von n auf $n+1$ die Beweismethode ist, so gliedert das Capitel sich zunächst in drei Ab-

schnitte, in deren erstem die Involution zweiter Ordnung behandelt wird, in deren zweitem die Lehrsätze über Involutionen $n$ter Ordnung aufgestellt werden, die dann im dritten erwiesen werden. In einem vierten Abschnitte werden daraus neue Folgerungen gezogen.

Eine verschwindende ganze Function zweier Variablen y und x, von den Graden m und μ in ihnen, liefert, wenn man letztere als Parameter betrachtet, eine gesetzmäfsige Anordnung von Gruppen eines linearen Systems, und zwar hängt jede Gruppe im Allgemeinen eindeutig von ihrem Parameter ab. Daher werden im dritten Capitel (§§ 77—119) der Arbeit zunächst in einem ersten Abschnitt die „Involutions-Netze“ zweiter und μter Stufe behandelt, die den linearen Systemen binärer Formen zweiter resp. μter Stufe entsprechen. Es wird die Analogie hervorgehoben, welche das erstere Netz mit der Ebene und das Netz dritter Stufe mit dem Raume haben würde. Darauf wird im zweiten Abschnitte aus dem Involutionsnetz zweiter Stufe eine einfach unendliche Reihe herausgehoben, die zu ihm sich verhält, wie der Kegelschnitt zur Ebene. Diese Involution zweiten Ranges deckt sich mit der gleich Null gesetzten ganzen Function, die in x vom zweiten, in y vom $m$ten Grade ist. Analog wird aus dem allgemeinen Netze μter Stufe im dritten Abschnitt eine Reihe herausgehoben, die zu ihm sich verhält, wie die cubische Curve zum Raume. Sie deckt sich mit der gleich Null gesetzten ganzen Function $m$ten und μten Grades in y und x. Das Schlufsresultat des Abschnittes ist, dafs zwei projectivische Involutionen $m$ter Ordnung, μten Ranges und $n$ter Ordnung, νten Ranges $m\nu + n\mu$ gemeinsame Stellen haben.

Das vierte Capitel (§§ 120—178) zieht nun aus den vorigen die Früchte. Die drei ersten Abschnitte begründen durch Schlüsse von 2 auf n und $n+1$ die Lehrsätze über die verschiedene Erzeugbarkeit der Curven, ihre gemeinsamen Punkte, sowie über ihr Zusammenschliefsen zu Büscheln und Netzen. Im vierten und fünften Abschnitt werden Lehrsätze über Schnittpunkt-Systeme ebener Curven aufgestellt und bewiesen, endlich wird im sechsten Abschnitt die Bestimmung der Curven durch gegebene Punkte erörtert.

Die analytisch-geometrischen Entwickelungen habe ich im fünften Capitel (§§ 179—196) im Zusammenhange behandelt.

Das Besondere unterliegt ewig dem Allgemeinen;
Das Allgemeine hat ewig sich dem Besondern zu fügen.
[Goethe.]

Einleitung.

Wie in der Analysis die durch reelle Gröfsen nicht lösbaren Gleichungen zweiten Grades zur Einführung der complexen Zahlen nöthigen, so drängen sich in der Geometrie die imaginären Gebilde bei den Aufgaben zweiten Grades auf, denen kein reelles Gebilde Genüge leistet. Die Aufgaben zweiten Grades der Ebene lassen sich im Wesentlichen alle auf die folgende und ihre dual gegenüberstehende zurückführen:

Gegeben auf einer reellen Geraden zwei projectivische Punktreihen

$$A_1 B_1 C_1 \ldots \;\overline{\wedge}\; A_2 B_2 C_2 \ldots ,$$

gesucht werden die beiden Reihen gemeinsamen Punkte. Zwei reelle und verschiedene Punkte sind der Reihe $A_1 B_1 C_1 \ldots$ mit unendlich vielen Reihen gemeinsam, und es liegt eine bestimmte unter ihnen mit $A_1 B_1 C_1 \ldots$ in Involution $(ABC\ldots)$.

Die Punkte, welche der gestellten Aufgabe entsprechen, sind jedenfalls eindeutig bestimmt als Doppelpunkte der Involution AA_1, BB_1, von der dann kein Paar das andere trennt. Wenn irgend zwei und folglich je zwei Paare einer Involution einander trennen, so betrachtet man dieselbe als Darstellung der dann nicht reell vorhandenen Doppelpunkte der Reihen

$$ABC\ldots \;\overline{\wedge}\; A_1 B_1 C_1 \ldots$$

Die so gewonnenen conjungirt imaginären Punkte und die dual gegenüberstehenden conjungirt imaginären Strahlen kann man bei einfacheren geometrischen Constructionen an Stelle zweier reeller Punkte oder Geraden einführen, nachdem man jenen eine für beide Fälle gleich verlaufende Lösungsform gegeben hat. In erster Linie kann man in dieser

Weise die Bestimmungen des Kegelschnittes aus gegebenen Punkten und Tangenten umgestalten.

Allein der Umstand, dafs man so die imaginären Gebilde nur paarweise behandeln kann, während die Deduction doch häufig einzelne imaginäre Punkte und Strahlen verlangt, birgt grofse Unbequemlichkeiten. Soll z. B. eine Gerade durch zwei imaginäre Punkte gelegt werden, so müssen ihre Träger zunächst in der Art perspectivisch bezogen werden, dafs Paare ihrer Involutionen einander entsprechen. Dies geht aber in zwei verschiedenen Weisen an; daher giebt es zwei verschiedene Punkte S und S_1, von denen aus die Involutionen beider gegebener Punkte durch dieselbe Strahleninvolution projicirt werden. Es bleibt völlig unbestimmt, welcher von beiden mit den gegebenen Punkten in einer Geraden liegt.

Das volle Verdienst, diese und andere Schwierigkeiten der geometrischen Imaginären-Theorie überwunden zu haben, kommt von Staudt zu. Seine bezüglichen Untersuchungen sind in den „Beiträgen zur Geometrie der Lage“ niedergelegt (drei Hefte, Nürnberg 1856, 1857 und 1860). Die beiden verschiedenen Bewegungsrichtungen, welche irgend eine Gerade zuläfst, kann man durch die Punktfolgen ABA_1B_1 und AB_1A_1B fixiren, wenn AA_1 und BB_1 Paare einer Involution derselben ohne Doppelelemente sind. Von Staudt hat nun den glücklichen Gedanken, diese Punktfolgen als Darstellungen der beiden conjungirten Punkte zu betrachten, welche durch die Involution bedingt werden. Bei allen Darstellungen des ersteren (CDC_1D_1) durch irgend zwei Paare CC_1 und DD_1 seiner Involution sollen C, D und C_1 in dem einmal bestimmten Sinne ABA_1 folgen. Ganz in derselben Weise werden die beiden conjungirten Geraden getrennt, welche durch irgend eine elliptische Strahleninvolution bedingt werden. Bei allen Darstellungen aba_1b_1; cdc_1d_1; ... der einen sollen a, b, a_1; c, d, c_1; ... in demselben (Drehungs-) Sinne auf einander folgen, bei allen Darstellungen ab_1a_1b; cd_1c_1d; ... der zweiten aber a, b_1, a_1; c, d_1, c_1; ... in dem zu jenem entgegengesetzten Sinne (Beiträge No. 116).

Nunmehr bestimmen irgend zwei imaginäre Punkte der reellen Ebene eine imaginäre Gerade. Denn die Träger der ersteren können nur in einer Weise perspectivisch so bezogen werden, dafs je zwei Darstellungen derselben einander entsprechen. Daher ergiebt sich auch nur ein reeller Punkt, der mit den gegebenen in einer Geraden liegt, von

der also jede Darstellung zu zwei Darstellungen der gegebenen Punkte perspectivisch ist. Ebenso bestimmen zwei imaginäre Geraden einen Punkt.

Der Raum enthält neben den imaginären Elementen seiner reellen Ebenen und Geraden noch zunächst imaginäre Ebenen. Jede in einem Ebenenbüschel enthaltene Involution ohne Ordnungselemente, mit der ein bestimmter Drehungssinn verbunden wird, bestimmt eine imaginäre Ebene, in welcher der reelle Träger des Büschels liegt. Jede den letzteren nicht schneidende reelle Gerade hat mit derselben einen imaginären Punkt gemeinsam, dessen Darstellungen zu denen der Ebene perspectivisch sind. Da jede reelle Ebene sie in einer imaginären Geraden trifft, so hat auch jede in einer reellen Ebene gelegene imaginäre Gerade einen imaginären Punkt mit der imaginären Ebene gemeinsam, wofern sie nicht ganz in ihr liegt.

Aufser den imaginären Geraden, die in je einer reellen Ebene liegen und daher auch je einen reellen Punkt enthalten, giebt es Geraden zweiter Art im Raume, bei denen beides nicht stattfindet. Von Staudt definirt dieselben mit Hülfe eines geschaart-involutorischen Systemes ohne Ordnungslinien. In einem involutorischen Systeme mit Ordnungselementen kann entweder jeder Punkt einer Ebene s und ein anderer S aufserhalb derselben sich selbst entsprechen, oder jeder Punkt, der in einer von zwei sich nicht schneidenden Geraden gelegen ist. Im ersten Falle gehen alle sich selbst entsprechenden oder Leitstrahlen des Systems durch den Ordnungspunkt, im zweiten Falle aber durch die beiden Ordnungsstrahlen. Als geschaart-involutorisch ist ein involutorisches System in diesem Falle zu bezeichnen und dann, wenn es überhaupt keine reellen Ordnungselemente besitzt. Zwei entsprechende Geraden können sich nämlich im dritten Falle überhaupt nicht treffen und im zweiten Falle nur in einem Punkte einer Ordnungslinie. Daher giebt es in beiden Fällen unendlich viele Regelschaaren, deren Leitschaaren nur aus Leitstrahlen bestehen, welche nämlich entsprechende Punkte zugehöriger Geraden $ACF\ldots \barwedge A_1C_1F_1\ldots$ verbinden. Zu den Involutionen des Systemes, deren Träger diese Leitstrahlen sind, ist in der Regelschaar eine bestimmte Involution gg_1hh_1 perspectivisch. Wenn Ordnungslinien vorhanden sind, so gehören sie jeder derartigen Involution als Doppelstrahlen an. Wenn die Ordnungslinien imaginär sind, so sind alle diese Involutionen ohne Ord-

nungselemente und Darstellungen der beiden imaginären Strahlen. Jeder Leitstrahl trifft beide in zwei conjungirten Punkten und sendet aufserdem zwei Ebenen aus, die alle Punkte derselben enthalten. Durch irgend eine Darstellung gg_1hh_1 der beiden Strahlen, die man von einer beliebigen Geraden g ausgehen lassen kann, ist das zu Grunde liegende involutorische System bestimmt, ebenso durch vier Leitstrahlen, die nicht alle zu einer Darstellung perspectivisch sind.

Auch hier weifs von Staudt einen bestimmten Richtungssinn mit dem involutorischen Systeme zu verbinden und dadurch eine Trennung der beiden Ordnungslinien zu bewirken. Wird mit der Involution gg_1hh_1 der bestimmte Sinn ghg_1h_1 verbunden, so wird auch mit den hierzu perspectivischen Involutionen der Leitstrahlen in ihrer Leitschaar je ein bestimmter Sinn

$$ABA_1B_1 \quad , \quad CDC_1D_1$$

verbunden. Da die beiden Punktfolgen auf p und q zu demselben Ebenenbüschel r perspectivisch sind, so sind sie hinsichtlich r und jedes anderen Strahles der Schaar pqr in gleichem Sinne beschrieben, denn nach von Staudt's Definition sind zwei Punktfolgen ABC und EFG auf p und q hinsichtlich r in gleichem Sinne beschrieben, wenn die Folgen $r(ABC)$ und $r(EFG)$ gleichen Sinnes sind (Beitr. No. 52, links). Wenn nun eine Gerade s die Regelschaar pqr überhaupt nicht trifft, oder doch nicht in zwei Punkten, die durch p und q getrennt werden, so zeigt von Staudt (Beiträge 55), dafs die beiden Folgen ABA_1B_1 und CDC_1D_1 auch bezüglich s in gleichem Sinne beschrieben sind. Irgend ein Leitstrahl des involutorischen Systemes mufs aber entweder ganz in der Regelfläche liegen, oder er kann sie überhaupt nicht treffen, denn als zwei verschiedenen Leitstrahlen angehörig, müfste ein etwaiger gemeinsamer Punkt ein Ordnungspunkt des involutorischen Systemes sein. Daher sind die beiden Punktfolgen

$$ABA_1B_1 \quad , \quad CDC_1D_1$$

in gleichem Sinne bezüglich jedes beliebigen Leitstrahles beschrieben. Die beiden Leitstrahlen p und q, denen sie selbst angehören, sind aber, weil AC oder g willkürlich war, unabhängig von einander. Daher ist dann folgende Thatsache bewiesen: wenn man mit irgend einer der im System

enthaltenen Involutionen, die aus Ebenen durch einen Leitstrahl s sich bilden lassen, einen bestimmten Sinn verbindet, mit jeder geraden auf einem Leitstrahl gelegenen Involution den perspectivischen Sinn, so gehören alle diese imaginären Punkte noch unendlich vielen anderen Ebenen an, von denen durch jeden Leitstrahl genau eine geht. Alle diese imaginären Punkte werden zu einer Geraden zweiter Art gerechnet, durch welche auch alle letzteren Ebenen gehen. Die verschiedenen Darstellungen

$$ghg_1h_1 \quad , \quad efe_1f_1 \text{ u. s. w.}$$

durch vier Geraden je einer Regelschaar sind zu je einfach unendlich vielen Darstellungen von Punkten derselben perspectivisch. Sie selbst, das heifst die zu ihnen perspectivischen Ebenen-Büschel

$$p(ghg_1h_1) \quad , \quad q(efe_1f_1)$$

sind in Bezug auf irgend einen Leitstrahl s in gleichem Sinne beschrieben.

Die Gerade zweiter Art hat mit jeder reellen Ebene einen imaginären Punkt gemeinsam und bestimmt mit jedem reellen Punkte eine imaginäre Ebene. Denn die Ebene enthält einen Leitstrahl, in welchem sie von ihrer entsprechenden Ebene im involutorischen System getroffen wird. Auf ihm liegt ein Punkt der Geraden zweiter Art. Der einzige Leitstrahl aber, der von einem reellen Punkte ausgeht, ist der Träger einer Ebene, welche die imaginäre Gerade und alle ihre Punkte enthält.

Zwei imaginäre Punkte bestimmen, wenn ihre Träger sich nicht schneiden, eine imaginäre Gerade zweiter Art. Denn wenn man die Darstellung DED_1E_1 des zweiten zu derjenigen ABA_1B_1 des ersteren projectivisch setzt, so ist sie durch D eindeutig bestimmt. Wenn nun AD, BE, A_1D_1, B_1E_1 mit e, f, e_1, f_1 bezeichnet werden, so ist efe_1f_1 eine Darstellung der gesuchten Geraden. Sie ist eindeutig bestimmt, weil damit auch ihr involutorisches System eindeutig gegeben ist. Ebenso bestimmen zwei imaginäre Ebenen eine imaginäre Gerade zweiter Art, in der sie sich schneiden, wenn ihre reellen Träger sich nicht treffen, im andern Falle eine solche erster Art.

Eine imaginäre Ebene enthält eine imaginäre Gerade zweiter Art vollständig, wenn irgend zwei Punkte P und Q derselben in ihr liegen. Denn Darstellungen der letzteren und der sie verbindenden Geraden sind zu irgend einer Darstellung der Ebene perspectivisch. Der reelle Träger der

letzteren ist folglich ein Leitstrahl des Systems, welches der Geraden zu Grunde liegt. Alle durch P und Q gehenden Ebenen haben die durch beide bestimmte Gerade und alle ihre Punkte gemeinsam. Wenn P und Q eine Gerade erster Art bestimmen, so liegt diese ebenfalls ganz in der Ebene.

Eine Gerade und ein Punkt bestimmen eine Ebene. Wenn beide imaginär sind, so legt man zuerst durch letzteren eine reelle Ebene, die mit der Geraden einen zweiten imaginären Punkt gemeinsam hat. Die beide Punkte enthaltende Gerade hat einen reellen Punkt, von dem aus die einzige Ebene durch die Gerade sich legen läſst, die auch den gegebenen Punkt enthält. Ebenso hat eine Gerade mit einer Ebene, in der sie nicht ganz liegt, einen Punkt gemeinsam.

Drei imaginäre oder theils reelle Punkte liegen entweder in einer Geraden, oder sie bestimmen eine Ebene. Drei reelle oder theils imaginäre Ebenen gehen entweder durch eine Gerade, oder sie bestimmen einen einzelnen ihnen gemeinsamen Punkt. Daraus sieht man, daſs die Elemente des Raumes, wenn man imaginäre und reelle zusammen nimmt, dieselben Grundeigenschaften erfüllen, welche bei dem Raume der reellen Elemente gültig waren. Auch jetzt noch kann der Punkt der Ebene reciprok gegenübergestellt werden, und die Gerade nimmt zwischen beiden die Mittelstellung ein. Soll die Geometrie der Ebene allgemein behandelt werden, so braucht man nur diejenige irgend einer reellen Ebene behandeln und kann dann diejenige irgend einer zweiten reellen oder imaginären Ebene dadurch herstellen, daſs man sie auf die erste perspectivisch bezieht.

In dem zweiten „Beitrage zur Geometrie der Lage“ entwickelt von Staudt in erster Linie, wie man einförmige Gebilde projectivisch beziehen kann. Irgend ein Element S eines Trägers liegt zu drei anderen PQR desselben entweder neutral, oder es ist im Sinne PQR oder QPR beschrieben. Wenn man es mit Punkten derselben Geraden zweiter Art und mit den Trägern $pqrs$ zu thun hat, so gehören diese im ersten Falle zu derselben Regelfläche. Im zweiten Falle ist die Darstellung von S im Sinne von pqr, und im dritten im Sinne qpr beschrieben. (Seite 11.) Diese Definition bleibt dann bestehen, wenn $PQRS$ Ebenen sind, welche dieselbe Gerade zweiter Art enthalten (Beiträge No. 196).

Wenn $PQRS$ vier Elemente einer Geraden sind, u_1 und u_2 aber zwei imaginäre Geraden zweiter Art, so stimmen die beiden perspectivischen Würfe

$$P_1 Q_1 R_1 S_1 \text{ oder } u_1(PQRS) \text{ und } P_2 Q_2 R_2 S_2 \text{ oder } u_2(PQRS),$$

was den Sinn anbelangt, überein. Es verhalten sich S_1 und S_2 zu $P_1 Q_1 R_1$ und $P_2 Q_2 R_2$ neutral, oder S_1 ist im Sinne $P_1 Q_1 R_1$ und gleichzeitig S_2 im Sinne $P_2 Q_2 R_2$ beschrieben, oder es ist endlich S_1 im Sinne $Q_1 P_1 R_1$ und S_2 im Sinne $Q_2 P_2 R_2$ beschrieben. Daher kann man auch (Beitr. 200) sagen, dafs $PQRS$, $P_1 Q_1 R_1 S_1$ und $P_2 Q_2 R_2 S_2$, was den Sinn anbelangt, übereinstimmen, und so diesen Begriff auf reelle Geraden und imaginäre erster Art übertragen.

Aus dem analogen Grunde kann man überhaupt sagen, dafs zwei in perspectivischen Gebilden einander entsprechende Würfe $PQRS$ und $P_1 Q_1 R_1 S_1$, was den Sinn anbelangt, übereinstimmen; auf diese Weise definirt man zugleich für alle einförmigen Gebilde, was unter dem Sinne zu verstehen ist, in welchem S bezüglich PQR beschrieben ist.

Zwei räumliche Systeme sind reell-projectivisch bezogen, wenn sie (No. 156), was ihre reellen Elemente anbelangt, projectivisch bezogen sind. Dabei entspricht jedem imaginären Element ein anderes, dessen Darstellung derjenigen des gegebenen entspricht. Wenn zwei reelle Gebilde reell-projectivisch sind, so sind je zwei entsprechende Würfe, was den Sinn anbelangt, von einerlei Art, denn sie können als das erste und das letzte Glied von mehreren Gebilden betrachtet werden, von denen auf einander folgende reell-perspectivisch sind.

Zu einer Kette gehören nach von Staudt alle die Elemente eines einförmigen Gebildes, welche zum Sinne von irgend dreien unter ihnen sich neutral verhalten. Bei einer imaginären Geraden zweiter Art gehören alle die Punkte zu einer Kette, deren reelle Träger zu einer Regelschaar gehören; wenn der Punkt S im Sinne PQR und T im Sinne QPR beschrieben ist, so liegen ihre Träger s und t zu verschiedenen Seiten der Regelschaar pqr. Jede s und t enthaltende Regelschaar des zu Grunde liegenden Systems trifft pqr in zwei verschiedenen Geraden. s und t können so bestimmt werden, dafs sie durch je zwei solche Geraden und, wie von Staudt definirt, durch die Kette harmonisch ge-

trennt werden. Die Bezeichnungen werden auf perspectivische Gebilde übertragen; alle reellen Elemente eines reellen Trägers gehören derselben Kette an, welche harmonisch durch irgend zwei conjungirt imaginäre Elemente getrennt wird. Bei einem Strahlbüschel mit imaginärem Centrum in einer reellen Ebene liegen die reellen Punkte aller Strahlen einer Kette auf einem Kegelschnitt, der das Centrum und den hierzu conjungirten Punkt enthält.

Zwei einförmige Gebilde sind projectivisch, wenn jedem Elemente ein Element entspricht, und überdies zwei entsprechende Würfe, was den Sinn anbelangt, übereinstimmen, insbesondere also jeder Kette eine Kette oder jedem neutralen Wurfe ein neutraler Wurf entspricht (Beitr. 215). Jedem harmonischen Wurfe gehört dabei ein harmonischer Wurf zu. Trennen nämlich die Punkte MN einer imaginären Geraden zweiter Art die beiden Punktepaare AA_1 und BB_1 derselben harmonisch, so liegen sowohl die vier Träger $mnaa_1$ als auch $mnbb_1$ harmonisch. a und a_1, sowie b und b_1 entsprechen sich in dem involutorischen Systeme mit den Ordnungslinien m und n. In demselben gehören die Regelflächen mab und ma_1b_1 einander zu. Der Geraden p, welche in ersterer noch von einem Punkte von m ausgeht, entspricht eine Gerade p_1, die von demselben Punkte von m ausgeht und in der Ebene mp liegt. Daher berühren sich mab und ma_1b_1 längs m oder sie haben nur m gemeinsam, und es gilt analoges von mab_1 und ma_1b. Wenn diese beiden Eigenschaften erfüllt sind, so giebt es eine zweite Gerade n, die mit m zusammen aa_1 und bb_1 harmonisch trennt. Wenn in einer zweiten projectivischen Geraden zweiter Art jenen Punkten diejenigen mit den Trägern $m', n', a', a_1', b', b_1'$ entsprechen, so gehören jenen Regelflächen die folgenden $ma'b'$ und $m'a_1'b_1'$, sowie $m'a'b_1'$ und $m'a_1'b'$ zu, die je nur m' gemeinsam haben, darum mufs m' mit einem anderen Strahle sowohl $a'a_1'$ als auch $b'b_1'$ harmonisch trennen. Da eine analoge Entwickelung für n und n' gemacht werden kann, und nur ein Punktepaar $m'n'$ die beiden harmonischen Trennungen bewirken kann, so gehören die harmonischen Würfe $mnaa_1$ und $m'n'a'a_1'$ oder $n'm'a'a_1'$ einander zu. Der Satz überträgt sich durch eine Reihe von Projectionen auf alle einförmigen Gebilde.

Wenn zwei reelle einförmige Gebilde so projectivisch sind, dafs irgend drei reellen Elementen des einen drei reelle des anderen entsprechen,

so sind die Gebilde reell-projectivisch. Denn zuerst entsprechen die aus je den reellen Elementen bestehenden Ketten einander und zwar projectivisch, weil je zwei harmonische Würfe einander zugehören. Entsprechen die reellen Würfe $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ einander, so gehören den conjungirten Punkten $ABCD$ und $ADCB$, die sowohl durch AC als BD harmonisch getrennt werden (wenn $ABCD$ in einerlei Sinn einander folgen) die beiden conjungirt imaginären Punkte zu, die sowohl durch A_1C_1 als auch durch B_1D_1 harmonisch getrennt werden. Einer von den beiden Punkten $A_1B_1C_1D_1$ oder $A_1D_1C_1B_1$ mufs sich zum Sinne $A_1B_1C_1$ verhalten, wie der Punkt $ABCD$ zum Sinne ABC; er wird dem Punkte $ABCD$ zugeordnet. Nun kann man jedenfalls durch eine Reihe perspectivischer Operationen $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ reell-projectivisch beziehen. Dabei werden die Elemente $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ einander zugewiesen und es stimmen daher die Würfe

$$A\,,B\,,C\quad,\quad ABCD \quad\text{und}\quad A_1\,,B_1\,,C_1\quad,\quad A_1B_1C_1D_1\;,$$

was den Sinn anbelangt, überein. Mithin müssen auch in den gegebenen Reihen $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ einander zugehören, und diese müssen reell-projectivisch sein.

Zwei projectivische einförmige Gebilde desselben Trägers sind identisch, wenn sie drei Elemente entsprechend gemein haben. Z. B. werden zwei Ebenen-Büschel betrachtet, die dieselbe imaginäre Gerade zweiter Art zur Axe haben. Die reellen Geraden der drei entsprechend gemeinsamen Ebenen werden von unendlich vielen reellen Geraden geschnitten. Auf jeder schneiden die Büschel Punktreihen aus, die zuerst reell-projectivisch sind und dann identisch, da drei Paare sich selbst entsprechender Punkte vorhanden sind. Zwei projectivische Gebilde sind demnach unzweideutig auf einander bezogen, sobald irgend drei Elementen des einen die entsprechenden des anderen zugewiesen sind. Als projectivisch können zwei Gebilde folglich allgemein dann bezeichnet werden, wenn sie als erstes und letztes Glied einer Reihe von einförmigen Gebilden betrachtet werden können, von denen je zwei folgende zu einander perspectivisch sind. Zwei projectivische in einander liegende Gebilde haben s t e t s gemeinsame und im Allgemeinen zwei verschiedene gemeinsame Elemente.

Nachdem von Staudt auf diese Weise gelehrt hat, dafs man auch mit Rücksicht auf ihre imaginären Elemente die einförmigen Gebilde projectivisch beziehen kann, führt er diese Gebilde in das Fundament seines Lehrgebäudes ein. Zwei ebene Systeme sind dann collinear oder reciprok noch zu beziehen, wenn irgend vier reellen oder imaginären Punkten vier beliebige Punkte oder Geraden zugewiesen sind. Die Kegelschnitte und die Flächen zweiten Grades werden als Ordnungsgebilde der allgemeinsten ebenen und räumlichen Polar-Systeme behandelt. Die Kegelschnitt-Theorie wird bis zu den Netzen, die Theorie der Flächen zweiter Ordnung bis zur Behandlung der einfachen Curven-Systeme und der Raumcurven vierter Ordnung gefördert.

Das durch zwei gegebene Gebilde, Curven oder Flächen, bestimmte einfache System behandelt von Staudt und nach ihm Hr. Th. Reye in seiner „Geometrie der Lage“ mit grofser Einfachheit aus der Definition heraus, dafs irgend ein Punktepaar AB entweder für sie alle oder nur für ein bestimmtes Gebilde conjugirt sein soll, woraus insbesondere folgt, dafs ein beliebiger Punkt P entweder nur ein Gebilde des einfachen Systemes bestimmt, oder ihnen allen angehört. Dieses Verfahren ist deswegen so brauchbar, weil man zeigen kann, dafs Curve resp. Fläche und Polar-System einander eindeutig bedingen. Weil der analoge Nachweis für Polar-Systeme höherer Ordnung sich nicht so leicht führen lassen dürfte, bin ich in der folgenden Arbeit zu der Steiner'schen Definition der Curven als Erzeugnisse projectivischer Büschel zurückgekehrt. Dafs man aus Gebilden $n$ter Ordnung, Punktgruppen, Curven oder Flächen, für welche die Polar-Eigenschaften vorausgesetzt werden, Polar-Systeme der Gebilde $n+1$ter Ordnung zusammensetzen kann, hat Hr. Thieme gezeigt. (Vergl. die Noten.)

Erstes Capitel. §§ 1—21.

Die imaginären Elemente der reellen Ebene nach von Staudt und die projectivische Beziehung zwischen ihren einförmigen Grundgebilden.

§ 1. Nach von Staudt's[1] Definition wird ein imaginärer Punkt A einer vorliegenden reellen Geraden dargestellt durch zwei Punktepaare AA_1 und BB_1 einer elliptischen Involution, mit denen man einen bestimmten Sinn der beiden möglichen verbindet. Der Ausdruck ABA_1B_1 symbolisirt so einen imaginären Punkt. Mit der Involution wird der Sinn verbunden, in dem A, B und A_1 auf einander folgen. Zur Darstellung des Punktes in derselben Art können unter Beibehaltung des Sinnes irgend zwei andere Paare der Involution dienen. Der betreffende Punkt ist jedoch scharf zu trennen von dem Punkte AB_1A_1B oder A[1], welcher zu jenem conjungirt genannt wird. Der Träger α seiner Darstellung ist die einzige durch einen imaginären Punkt gehende reelle Gerade.

Analog wird eine imaginäre Gerade a einer reellen Ebene dargestellt durch zwei beliebige Paare aa_1; bb_1 einer elliptischen Strahleninvolution, mit welcher man einen bestimmten Drehungssinn der beiden möglichen verbindet. Sie kann durch die Zeichenverbindung aba_1b_1 symbolisirt werden, wenn in dem bestimmten Sinne a, b und a_1 auf einander folgen. Sie enthält keinen anderen reellen Punkt als den Träger $\mathfrak{A}$ ihrer Darstellungen und ist von ihrer conjungirten Geraden ab_1a_1b oder β[1] wohl zu trennen.

Die gegebenen Definitionen umfassen auch das begrenztere Gebiet der reellen Elemente der Ebene, indem nämlich der reelle Punkt durch zwei Punktepaare der parabolischen Involution, deren Doppelpunkt er ist,

und die reelle Gerade durch zwei Paare der parabolischen Strahleninvolution, deren Doppelstrahl sie ist, dargestellt werden kann.

Anm. Die hier angewendete Bezeichnungsweise soll eine bleibende sein.

§ 2a. Wenn für eines von zwei imaginären Elementen eine beliebige Darstellung $[ABA_1B_1]$ gegeben ist, so kann eine und nur eine von einem beliebigen Element seines Trägers $[M]$ ausgehende Darstellung $[MNM_1N_1]$ des anderen gefunden werden derart, dafs die beiden Darstellungen zu einander projectivisch sind $[ABA_1B_1 \barwedge MNM_1N_1]^2$.

Zusatz: Von zwei benachbarten Elementen (M und M') gehen Darstellungen aus $[MNM_1N_1$ und $M'N'M_1'N_1']$, deren entsprechende Elemente einander nahe liegen.

Die beigefügten Bezeichnungen beziehen sich auf den Fall zweier imaginärer Punkte **A** und **B**.

Man verbinde den beliebigen Punkt C (Fig. 1) einer durch MM_1 gehenden Curve zweiter Ordnung mit den Paaren der Involution von **B**. Auf dem Kegelschnitt entstehen die Paare einer Involution, deren Verbindungslinien durch einen auf MM_1 und innerhalb des Kegelschnittes gelegenen Punkt E gehen. Auch dieser Involution kommt ein bestimmter Sinn zu. Der Forderung

$$MEM_1F \barwedge ABA_1B_1$$

genügt ein bestimmter Punkt F, der aufserhalb des Kegelschnittes liegt, weil AA_1 und BB_1 einander trennen. Von F aus gehen also zwei Tangenten an den Kegelschnitt, deren Berührungspunkte GG_1 von MM_1 getrennt werden. Daher ist der Sinn MG_1M_1 von demjenigen MGM_1 verschieden; es möge der erstere mit dem gegebenen übereinstimmen. EG treffe den Kegelschnitt noch in H. Alsdann ist

$$MHM_1G \barwedge ABA_1B_1 \barwedge MEM_1F\,.$$

Daher wird MHM_1G von C aus in den gesuchten Wurf MNM_1N_1 projicirt. Denn es ist

$$MNM_1N_1 \barwedge MHM_1G \barwedge ABA_1B_1\,;$$

überdies stimmt der Sinn mit dem des Punktes **B** überein. Da die ganze

Procedur sich umkehren läfst, so giebt es nur diese eine Lösung der Auf-

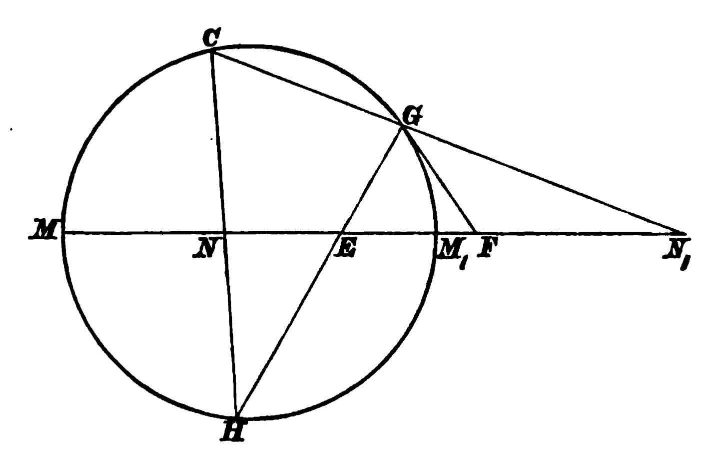


Fig. 1.

gabe. Zu einer anderen Darstellung ACA_1C_1 von A erhält man die zugehörige MON_1O_1, und es ist dann

$$AA_1BB_1CC_1\ldots \barwedge MM_1NN_1OO_1\ldots$$

Hat man an Stelle von B den conjungirten Punkt B^1 zu betrachten, so tritt für G der Punkt G_1 ein, welcher ihn von MM_1 auf dem Kegelschnitt harmonisch trennt; für N und N_1 treten die durch sie harmonisch von MM_1 getrennten Punkte N' und N_1' ein.

Für den Zusatz mufs angenommen werden, dafs zwei Geraden ihrer ganzen Ausdehnung nach einander nahe liegen, und also auf irgend einer dritten benachbarte Punkte ausschneiden, wenn irgend zwei Punkten LM der einen zwei Punkte $L'M'$ der anderen genügend genähert werden. Um keine Ausnahme aufkommen zu lassen, mufs noch angenommen werden, dafs sehr ferne Punkte einer Geraden sich ihrem unendlich fernen Punkte nähern.

Aus der Annahme folgt unmittelbar, dafs je zwei entsprechende Punkte zweier projectivischer Reihen desselben Trägers einander nahe liegen müssen, wenn irgend drei Punkten der ersteren ihre entsprechenden genügend genähert sind. Denn das Geradengefüge, welches die erste Reihe mit einer dritten in projectivische Beziehung setzt, braucht nur wenig verschoben zu werden, um auch die zweite Reihe zu dieser in Beziehung zu bringen. Daher schliefsen sich auch die Paare einer Involution stetig an

einander. Ist nämlich C bei B gelegen, und sind AA_1, BB_1, CC_1 drei ihrer Paare, so ist

$$AA_1BC_1 \barwedge A_1AB_1C \barwedge AA_1CB_1 .$$

Daher liegt auch C_1 bei B_1. Geht man jetzt bei der vorstehenden Construction von einem bei M auf dem Kegelschnitt gelegenen Punkte M'' aus, so treten auch an Stelle von G, H, M_1, F ihnen benachbarte Punkte G'', H'', M_1'', F''; E aber bleibt ungeändert. Von C aus projicirt sich $M''H''M_1''G''$ in die MNM_1N_1 benachbarte und zu ihm projectivische Darstellung $M'N'M_1'N_1'$.

§ 2b. Eine Gerade aba_1b_1 geht durch einen Punkt ABA_1B_1, wenn die Strahleninvolution der Schein der Punktinvolution ist, überdies aber der Sinn ABA_1 mit dem Sinne $\mathfrak{a}$ (aba_1) übereinstimmt[3]. Zwei Punkte lassen sich stets durch eine Gerade verbinden, zwei Geraden haben stets einen Punkt gemeinsam[4].

Haben zwei imaginäre Punkte $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zwei verschiedene Träger $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit dem Schnittpunkt C, so gehört zu jeder Darstellung CAC_1A_1 von $\mathbf{A}$ eine projectivische $CA'C_1'A_1'$ von $\mathbf{B}$. AA', C_1C_1', A_1A_1' gehen durch einen Punkt O. Bezeichnet man diese Geraden mit a, c_1, a_1, die Gerade OC aber mit c, so ist cac_1a_1 die gesuchte Gerade, und keine andere als diese genügt der gestellten Aufgabe. Sollten die imaginären Punkte demselben Träger angehören, so verbindet sie allein dieser. Einen reellen Punkt C mit einem imaginären ABA_1B_1 verbindet nur die imaginäre Gerade CA; CB; CA_1; CB_1. Vermöge des Reciprocitätsgesetzes folgt aus dem soeben Entwickelten, dafs zwei beliebige reelle oder imaginäre Geraden sich stets in einem bestimmten Punkt schneiden.

§ 3. Wir bezeichnen als einförmige Gebilde die Gesammtheit der Strahlen eines Büschels oder der Punkte einer reellen oder imaginären Geraden. Beide Gebilde sind perspectivisch, wenn jeder Strahl des Büschels den entsprechenden Punkt der Geraden enthält. Zwei einförmige, gleichartige oder ungleichartige Gebilde sind projectivisch, wenn sie Anfangs- und Endglieder einer Reihe von Gebilden sind, von denen je zwei auf einander folgende perspectivisch sind. Wir bedienen uns des Hülfsmittels der reellen Repräsentation der imaginären Elemente. Ein Strahlbüschel

mit imaginärem Centrum kann durch die reellen Punkte seiner Ebene repräsentirt werden; nämlich jeder fixirt eindeutig den imaginären Strahl, welchem er angehört. Ebenso kann man den Punkt einer imaginären Geraden durch seinen Träger, ihre Gesammtheit durch die reellen Geraden der Ebene darstellen. Um die Punkte einer reellen Geraden oder die Geraden eines Strahlbüschels mit reellem Centrum festzulegen, projicirt man erstere von einem imaginären Centrum aus, und schneidet letztere durch eine imaginäre Gerade. Das imaginäre Element eines der ersteren Gebilde wird dann durch den reellen Träger des entsprechenden Elementes in dem zugehörigen zweiten Gebilde eindeutig fixirt[5].

Zur Klarlegung der allgemeinen projectivischen Beziehung haben wir den Zusammenhang unter den reellen Gebilden der Ebene festzustellen, die ein Strahlbüschel und eine dazu perspectivische Gerade repräsentiren. Dabei sind die vier Fälle zu unterscheiden, daſs nur das Centrum oder nur die Gerade imaginär ist, oder daſs beide es sind, oder daſs endlich beide reell sind. Wegen der Repräsentation einer Punktreihe mit reellem Träger handelt es sich im ersten Falle um zwei Strahlbüschel mit den imaginären Centren A und B, die zu derselben reellen Geraden perspectivisch sind. Das zweite Problem aber nimmt die zu jener duale Gestalt an.

In den Repräsentationsebenen zweier projectivischer Gebilde sind die Hauptelemente zu beachten. Alle reellen Punkte des Trägers eines imaginären Grundpunktes bestimmen nur diese eine von ihm ausgehende Gerade und also auch nur ein Element des repräsentirten Gebildes. Allen diesen Punkten entspricht nur ein Element, das Hauptelement der zweiten Repräsentationsebene, während den Punkten aller anderen Geraden einfache Mannigfaltigkeiten zugehören. Dient eine imaginäre Gerade zur Repräsentation des ersten Gebildes, so bestimmen alle durch ihren reellen Punkt gehenden Geraden ein Element desselben. Ihnen allen gehört daher nur ein Element, das Hauptelement der zweiten Repräsentationsebene zu. Natürlich giebt es auch in der ersten Ebene ein Hauptelement.

§ 4. Hülfssatz. Die Linien, welche irgend zwei feste Punkte E, E_1 mit den Punktepaaren AA_1, BB_1, CC_1 ... einer gegebenen Involution verbinden, schneiden sich auf dem Kegelschnitt, für den die Paare

der Involution, sowie ihr Träger und EE_1 einander conjugirt sind, und der überdies E und E_1 enthält[6].

Sicher giebt es einen Kegelschnitt, welcher der zweiten Hälfte des Satzes genügt. AA_1 und seine beiden Tangenten in E und E_1 verbinden drei Paare für ihn conjugirter Punkte der beiden Seiten AE und A_1E_1. Alle drei schneiden sich, weil EE_1 und AA_1 in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt sind, in einem Punkte von AA_1. Daher sind die immer projectivischen Reihen conjugirter Punkte auf AE und A_1E_1 speciell perspectivisch. Ihr Kreuzungspunkt gehört mithin, als sich selbst conjugirt, dem Kegelschnitt an. Derselbe enthält die reellen oder conjungirt imaginären Ordnungselemente der Involution AA_1, BB_1, CC_1.

§ 5. Als Ketten einer Repräsentationsebene werden die Kegelschnitte bezeichnet, welche den Grundpunkt und seinen conjungirten enthalten, resp. den Grundstrahl und dessen conjungirten berühren. Im ersten Falle ist die Kette eine Orts-, im zweiten Falle eine Hüllcurve. Durch irgend drei reelle Punkte einer Punkt-Repräsentationsebene kann man stets eine Kette derselben legen. Der Träger des Grundpunktes kann dabei wie ein Punkt behandelt werden. Wenn man den vorigen die Punkte $A'B'C'$ unbegrenzt nähert, so rückt jeder einzelne Punkt D' der Kette $A'B'C'$ an irgend einen Punkt der Kette ABC heran.

Es mögen AB und AC den Träger $\mathfrak{a}$ des Grundpunktes $\mathfrak{A}$ resp. in P und Q treffen. Es sei PQP_1Q_1 eine Darstellung desselben und A_1 der Schnittpunkt von BP_1 und CQ_1. Dann erfüllt nur der Kegelschnitt, für den die Paare der Involution PP_1, QQ_1, ferner ihr Träger und AA_1 einander conjugirt sind, und der AA_1 enthält, die gestellten Bedingungen (§ 4)[7]. Der Träger $\mathfrak{a}$ des Grundpunktes bestimmt mit irgend zwei Punkten A und B eine Kette, die aus $\mathfrak{a}$ und AB besteht. Zwei verschiedene Ketten können daher höchstens zwei Punkte aufserhalb $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a}$ und einen Punkt aufserhalb $\mathfrak{a}$ gemeinsam haben.

Man beziehe auf die Kette $A'B'C'$ überhaupt die gestrichenen Buchstaben. Dann mufs (§ 2a) P' bei P, Q' bei Q gelegen sein, folglich auch P_1' bei P_1 und Q_1' bei Q_1. Der Schnittpunkt A_1' von $B'P_1'$ und $C'Q_1'$ liegt daher um so näher bei A_1, je weiter A', B', C' an A, B, C heranrücken. Ist nun RR_1 ein beliebiges Paar der Involution von $\mathfrak{A}$, so

schneiden sich AR und A_1R_1 in einem Punkte D der Kette ABC, $A'R$ und $A_1'R_1$ in einem bei jenem gelegenen Punkte D' der Kette $A'B'C'$. Die Tangenten der beiden Ketten in A und A' liegen einander nahe, denn sie führen nach den benachbarten Punkten von $\mathfrak{a}$, die zu den Schnittpunkten von AA_1 und $A'A_1'$ in der Involution $\mathbf{A}$ conjugirt sind.

§ 6. Es sei MNM_1N_1 eine Darstellung eines beliebigen imaginären Punktes $\mathbf{B}$, und $\mathbf{A}$ ein beliebiger Grundpunkt auf irgend einer anderen Geraden. Die beiden Ketten, welche die Punkte MM_1 und NN_1 enthalten und für die $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ einander conjugirt sind, schneiden sich in den reellen Punkten F und F' der Geraden $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{AB}^1$. Durch dieselben gehen auch alle anderen Ketten, für die $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einander conjugirt sind und die zwei hinsichtlich $\mathbf{B}$ conjugirte Punkte enthalten[8].

Zwei imaginäre Punkte $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}_1$ werden einander genähert, indem ihre Träger $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ und die Punkte MNM_1N_1 und $M'N'M_1'N_1'$ zweier Darstellungen derselben einander einzeln genähert werden. Zwei Geraden a und a_1 liegen einander nahe, wenn ihre Träger $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ sowie zwei Darstellungen aba_1b_1 und $a'b'a_1'b_1'$ einander nahe liegen. Die Gerade $\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1$ liegt bei $\mathbf{BA}$, wenn $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{B}_1$ genügend nahe bei $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ liegen. Auf jeder dritten Geraden bestimmen $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$ benachbarte Punkte.

Von allen Punkten des ersten Kegelschnittes aus wird MM_1 in ein Punktepaar der Involution $\mathbf{A}$ projicirt. Im Punkte C_1, welcher in ihr dem Schnittpunkt $\mathfrak{ab}$ zugehört, treffen sich mithin seine Tangenten in M und M_1; er ist daher der Pol des Kegelschnittes bezüglich $\mathfrak{b}$. Von jedem Punkte des zweiten Kegelschnittes aus wird NN_1 in ein Paar der $\mathbf{A}$ zugehörigen Involution projicirt. Auch für diesen Kegelschnitt ist C_1 der Pol von $\mathfrak{b}$. Da nun MM_1 durch NN_1 getrennt werden, treffen sich die Kegelschnitte in zwei reellen Punkten F und F_1. Sie liegen mit C_1 auf einer Geraden und werden durch C_1 und $\mathfrak{b}$, also auch durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ harmonisch getrennt. Von beiden Punkten aus werden MM_1 und NN_1 in Paare der Involution von $\mathbf{A}$ projicirt. Die Geraden, welche sie mit $\mathbf{A}$ verbinden, gehen also durch $\mathbf{B}$ selbst oder durch seinen conjungirten $\mathbf{B}^1$. Welcher von beiden der gesuchte Repräsentant von $\mathbf{B}$ hinsichtlich $\mathbf{A}$ ist, hängt allein von dem Sinn ab, in dem ersterer beschrieben ist. Zwei Seiten eines Dreiecks PC und CR, die auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gelegen sind, und deren

gemeinschaftlicher Grenzpunkt C (oder $\mathfrak{ab}$) als Endpunkt der einen und als Anfangspunkt der anderen betrachtet wird, sind in Hinsicht auf einen Punkt S, welcher in keiner der beiden Geraden liegt, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nach dem die Gerade SC den Umfang des Dreiecks in C schneidet oder berührt[9]. Wenn nun PC und CR die Sinne der Punkte $\mathbf{B}$ und $\mathbf{A}$ darstellen, FC das Dreieck PCR schneidet und F_1C es berührt, so ist F der reelle Punkt von $\mathbf{AB}$, und F_1 derjenige von $\mathbf{AB}^1$. Von beiden Punkten aus werden die Involutionen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ in einander projicirt. Alle Ketten $\mathbf{A}$, die zwei hinsichtlich $\mathbf{B}$ conjugirte Punkte enthalten und C_1 zum Pol von $\mathfrak{b}$ haben, gehen daher durch F und F_1.

Tritt an Stelle von $\mathbf{B}$ oder MNM_1N_1 der nahe gelegene Punkt $\mathbf{B}_1$ oder $M'N'M_1'N_1'$ (wo nicht $MNM_1N_1 \barwedge M'N'M_1'N_1'$ vorausgesetzt wird), so ist zuerst die Kette, die in M und M_1 MC_1 und M_1C_1 berührt, durch die zu ersetzen, welche in $M'M_1'$ die Geraden $M'C_1'$ und $M_1'C_1'$ berührt. Da nun C_1' mit dem Schnittpunkt $\mathfrak{b}'\mathfrak{a}$ ein Paar der Involution $\mathbf{A}$ bildet, $\mathfrak{b}'$ aber bei $\mathfrak{b}$ liegt, so ist auch (§ 2a) C_1' bei C_1 und folglich $M'C_1'$ bei MC_1 gelegen. Die beiden zu $\mathbf{B}_1$ gehörenden Ketten liegen daher den zu $\mathbf{B}$ gehörenden nahe (§ 5), ihre Schnittpunkte F' und F_1' also bei F und F_1. F' liegt auf der Geraden $\mathbf{B}_1\mathbf{A}$. Aus jeder Darstellung von $\mathbf{A}$ fließen zwei projectivische und einander nahe gelegene Darstellungen der Punkte $\mathbf{B}$ und $\mathbf{B}_1$, sowie der Geraden $F\mathbf{A}$ (oder $\mathbf{BA}$) und $F'\mathbf{A}$ (oder $\mathbf{B}_1\mathbf{A}$) ab. Durch zweimalige Anwendung des Bewiesenen folgt, daß $\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1$ bei $\mathbf{BA}$ liegt, wenn auch $\mathbf{A}_1$ in der Nähe von $\mathbf{A}$ gelegen ist. Bei Durchführung der dualen Betrachtungsweise ergiebt sich, daß zwei einander nahe liegende Geraden auf irgend einer dritten benachbarte Punkte bestimmen.

§§ 7—9. Wird eine reelle Gerade $\mathfrak{c}$, welche zu einem Strahlbüschel mit imaginärem Centrum $\mathbf{A}$ perspectivisch ist, von einem zweiten $\mathbf{B}$ aus repräsentirt, so entspricht jeder Kette der ersten eine zu ihr perspectivische Kette der zweiten Ebene. Einem Kettenbüschel A_1A_2 entspricht ein projectivisches B_1B_2 der zweiten Ebene. In den reell-projectivischen Tangentenbüscheln A_1, A_2, B_1, B_2 gehören reelle Darstellungen der imaginären Strahlen $A_1\mathbf{A}$; $A_2\mathbf{A}^1$; $B_1\mathbf{B}$; $B_2\mathbf{B}^1$ und also diese selbst einander zu[10].

Den Strahlen durch den Hauptpunkt J_1 der ersten Ebene entsprechen projectivisch Geraden, die durch den Hauptpunkt J_2 der zweiten gehen. Die beiden Strahlbüschel J_1 und J_2 sind reell-projectivisch so bezogen, dafs die imaginären Strahlen J_1A und J_2B[1] einander entsprechen.

Anm. In diesem besonderen Fall ist B oder 𝔟𝔠 der Hauptpunkt der ersten, A oder 𝔞𝔠 derjenige der zweiten Ebene.

§ 7. Vorbereitende Bemerkungen.

Alle Punkte Γ der reellen Geraden 𝔠 mit einerlei Richtungssinn haben ihre repräsentirenden Punkte in Bezug auf A in einem bestimmten Strahlenwinkel 𝔠𝔞 und in Bezug auf B in einem bestimmten Strahlenwinkel 𝔠𝔟 (§ 6). Diese von vorn herein bestimmbaren beiden Strahlenwinkel werden somit auf einander bezogen, und ebenso die beiden anderen. Die Punkte der Geraden 𝔠 entsprechen sich selbst. Der Schnittpunkt A von 𝔞 und 𝔠 wird hinsichtlich B nur durch sich selbst, dagegen von A aus durch jeden Punkt der Geraden 𝔞 repräsentirt und ist daher (§ 3) der Hauptpunkt der Ebene B; ebenso ist der Schnittpunkt B von 𝔟 und 𝔠 der Hauptpunkt der Ebene A. Alle Punkte Γ des Trägers 𝔠, zu deren Darstellung das Paar HH_1 gehört, werden in Bezug auf die Punkte A und B durch reelle Punkte der Ketten HH_1 repräsentirt, für welche 𝔠 und 𝔞, resp. 𝔟 und 𝔠, einander conjugirt sind. Derartige Ketten werden punktweise einander zugeordnet. Strahlen, welche von dem Punkte A_1 ausgehen, der mit A ein Paar der Involution A bildet, entsprechen Kegelschnitte der B-Ebene, die durch A und ihre Schnittpunkte mit 𝔠 gehen, und für die 𝔠 und 𝔟 einander conjugirt sind. Jede der betrachteten Ketten wird durch die Punkte H und H_1 in zwei ganz in dem einen oder anderen Strahlenwinkel 𝔠𝔞 resp. 𝔟𝔞 gelegene Bögen getheilt. Gehören also zwei Punkte der ersten Ebene demselben Bogen HH_1 der besonderen Kette der A-Ebene an, so gehören auch die entsprechenden demselben Bogen HH_1 der zugehörigen besonderen Kette der B-Ebene an.

§ 8. Die Strahlen der Winkel 𝔟𝔠 und 𝔞𝔠 gehören einander in den Ebenen A und B zu. Es seien AA_1 und BB_1 Paare der Involutionen A

und B. Irgend ein Punkt Γ der Geraden c läſst sich in einer der wesentlich verschiedenen Formen

$$AHGB \qquad \text{oder} \qquad ABGH$$

darstellen, unter AG und HB Paare seiner Involution verstanden. Mit der ersten Form, die wir behandeln, kommt die Darstellung $BAHG$ überein, denn sie stützt sich auf dieselben Paare, wie die erste und stimmt mit ihr, was dem Sinn anbelangt, überein. Es repräsentire E den Punkt Γ hinsichtlich A, und F hinsichtlich B. EH und EB einerseits, FA und FG andererseits müssen dann Paare CC_1 und DD_1 der Involutionen von A und B ausschneiden. ACA_1C_1 und BDB_1D_1 sind auch dem Sinne nach richtige Darstellungen derselben. Ferner ist

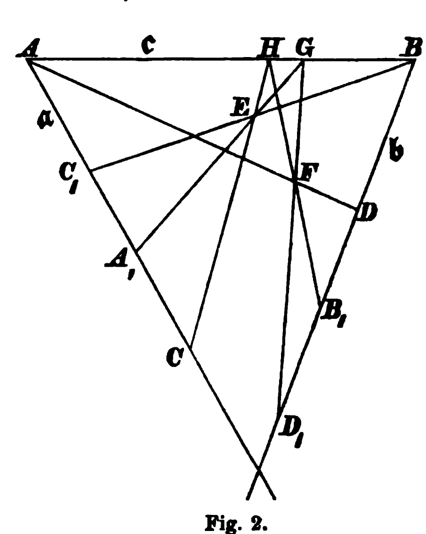


Fig. 2.

$$ACA_1C_1 \barwedge AHGB \quad \text{und} \quad BAHG \barwedge BDB_1D_1 .$$

Da selbstverständlich

$$AHGB \barwedge BGHA$$

ist, so ergiebt sich

$$ACA_1C_1 \barwedge BD_1B_1D .$$

Auf dasselbe Resultat kommt man, wenn Γ die Darstellung $ABGH$ und die synonyme $BGHA$ besitzt. BD_1B_1D ist eine Darstellung des zu B conjungirten Punktes B¹ und zwar die einzige, die von BB_1 ausgeht und zu der Darstellung ACA_1C_1 des Punktes A projectivisch ist. Ändert sich E auf der Geraden BC_1, so bewegt sich F projectivisch auf der Geraden AD. Denn CEH dreht sich um C, B_1FH aber um B_1. C_1 und A, sowie B und D entsprechen einander. Den von B ausgehenden Geraden der ersten Ebene entsprechen also projectivisch in der zweiten Ebene durch A gehende Strahlen. Die Büschel B und A sind so projectivisch, daſs jeder von BA ausgehenden Darstellung von BA eine von AB ausgehende Darstellung von AB¹ zugehört.

§ 9. Wir führen nun collinear zur Ebene B eine Hülfsebene A_1 ein. Der Wurf ACA_1C_1 derselben kann nach § 8 zu BD_1B_1D von B entsprechend gesetzt werden, also dem imaginären Punkt A der Hülfsebene der imaginäre Punkt B^1 der zweiten, jeder von AA_1 ausgehenden Darstellung des ersteren die von BB_1 ausgehende und projectivische Darstellung des letzteren. Entspricht noch dem Punkte A der zweiten Ebene der Punkt B der Hülfsebene, so gehört jeder Geraden AD_1 der Ebene B die Gerade BC in beiden Ebenen A und A_1 zu. Nach § 8 entstehen auf jedem Strahl BC in den letzteren Ebenen projectivische Reihen. Den Punkten B und C von A gehören in der Ebene B D_1 und A und folglich in der Ebene A_1 C und B zu, weshalb die Reihen in A und A_1 speciell involutorisch sind. Allen Punkten der Geraden $\mathfrak{a}$ entspricht je in der anderen Ebene der Punkt B.

Inverse!

Um die collineare Beziehung zwischen den Ebenen B und A_1 endgültig festzulegen, können noch, da die Gerade AB ihnen gemein ist, und AB einander wechselseitig entsprechen, zwei beliebige Punkte GH derselben einander zugeordnet werden. $AHGB$ soll die Darstellung eines imaginären Punktes Γ sein. Je zwei entsprechende Punkte von B und A_1 auf AB bilden ein Paar der hyperbolischen Involution AB, GH. Dasselbe gilt, da die Ebenen B und A die Gerade AB entsprechend gemein haben, auch von den Ebenen A und A_1. Die Ordnungspunkte J und J_1 dieser Involution sind allen drei Ebenen entsprechend gemein. Auch der Repräsentant E der Ebene A des besonderen imaginären Punktes $AHGB$ ist den Ebenen A und A_1 entsprechend gemein. In der Ebene B entspricht ihm der Punkt F der Figur 2. Zu den Strahlen B_1H und GD_1 von B, die sich in F kreuzen, gehören in A_1 die Geraden A_1G und CH, die sich in E treffen.

Jeder Kette von B entspricht eine Kette von A_1. Sind in Bezug auf erstere $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$ einander conjugirt, so sind für die letztere $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}$ conjugirt. Der ersteren gehört aber dann auch in der Ebene A eine Kette zu, für die $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}$ conjugirt sind. Jeder solchen Kette von A entspricht also eine Kette derselben Art in A_1. Den beiden Schnittpunkten der ersteren mit $\mathfrak{c}$ entsprechen in der letzteren die von jenen durch J und J_1 harmonisch getrennten Punkte. Die bestimmte Kette K, welche J und J_1 enthält, für die überdies B der Pol von $\mathfrak{a}$ ist, ist beiden

Ebenen A und A_1 gemeinsam. Da B auf JJ_1 und innerhalb K liegt, so schneidet eine von ihm ausgehende Gerade jeden der Bögen JJ_1 einmal. Nach § 8 entsprechen entweder beide Punkte sich selbst oder einander wechselseitig. Da J und J_1 sich selbst entsprechen, müssen nach Art. 7 entweder alle Punkte von K sich selbst oder je zwei mit B in gerader Linie befindliche Punkte L und L_1 einander entsprechen. Da im letzteren Fall die beiden verschiedenen Bögen LL_1 von K und mithin auch J und J_1 einander wechselseitig entsprechen würden, so ist der zweite Fall ausgeschlossen. K enthält die Ordnungselemente aller der involutorischen Reihen, in welchen auf den von B ausgehenden Geraden die entsprechenden Punkte von A und A_1 angeordnet liegen. Je zwei entsprechende Punkte sind daher mit einander hinsichtlich K conjugirt, überdies aber mit B, seinem Pol bezüglich $\mathfrak{a}$, in gerader Linie gelegen. Die Beziehung ist eine wechselseitige und ordnet, wie wir schon früher sahen, den Pol B und sämmtliche Punkte von $\mathfrak{a}$ einander zu[11]. Keine durch den Punkt B gehende Gerade geniefst einen Vorzug vor der anderen. Alle Eigenschaften also, bei denen eine von ihnen eine Sonderstellung einnimmt, fahren fort zu gelten, wenn statt ihrer eine beliebige von B ausgehende Gerade eintritt. Jede Kette, deren Pol bezüglich $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{c}$ liegt, geht aber in eine Kette mit derselben Eigenschaft über. Also entspricht jeder beliebigen Kette von A in A_1 eine andere und beider Pole bezüglich $\mathfrak{a}$ liegen mit B in einer Geraden. Eine durch A_1 gehende Gerade geht in eine Kette über, die in B die Gerade BA_1 berührt; es entsteht nun aus jeder Geraden l eine Kette, die B enthält; ihre Tangente in diesem Punkte führt nach dem Schnittpunkt $l\mathfrak{a}$.

Einem durch zwei beliebige reelle und getrennte Punkte gelegten Kettenbüschel entspricht das durch die beiden entsprechenden Punkte gehende Kettenbüschel. Einem Büschel in einem reellen Punkte sich berührender Ketten entspricht in A_1 ein Büschel von Ketten, die einander in dem entsprechenden Punkte berühren. Schnitten sich irgend zwei der letzteren in zwei Punkten, so müfsten auch die beiden, aus denen sie entstehen, sich in zwei Punkten schneiden.

Eine Kette ist, jedoch nicht entsprechend, den Feldern A und A_1 gemeinsam, sobald sie zwei einander entsprechende Punkte L und L_1 enthält. Denn sie hat mit ihrer zugehörigen aufser L und L_1 auch die

beiden Punkte M und N gemeinsam, in denen sie, weil L und L_1 durch K getrennt werden, diesen Kegelschnitt treffen mufs. Die beiden entsprechenden Ketten fallen also nach § 5 zusammen, enthalten aber aufser M und N keine entsprechend gemeinen Punkte. Die durch irgend zwei Punkte E und F gehenden Ketten mit dem Grundpunkt A haben dieselbe Polare bezüglich des Schnittpunktes R von α und EF; erstens geht sie durch den harmonisch von EF durch R getrennten Punkt und zweitens durch den Punkt R_1, der mit R ein Paar der Involution A bildet. Die Tangenten einer jeden Kette in E und F treffen sich auf dieser Geraden und trennen daher R und R_1 harmonisch. Bilden zwei der ersteren eine von RR_1 ausgehende Darstellung des Strahles $E\mathrm{A}$, so ergeben (§ 2a) die letzteren die projectivische von RR_1 ausgehende Darstellung von $F\mathrm{A}^1$. Die beiden Tangentenbüschel sind daher so reell-perspectivisch, dafs die imaginären Strahlen $E\mathrm{A}$ und $F\mathrm{A}^1$ einander zugehören.

Es seien nun A_1A_2 und $A_1'A_2'$ entsprechende Kettenbüschel der Ebenen A und A_1. Eine Kette A_1A_1', die in A_1 einer Kette des ersteren Büschels sich anschliefst, mufs in A_1' von selbst die entsprechende Kette berühren. Die Tangentenbüschel in A_1 und A_1' sind daher so bezogen, dafs $A_1\mathrm{A}$ und $A_1'\mathrm{A}^1$ einander zugehören. Aus dem Vorhergehenden ist klar, dafs auf beide Büschel die in A_2 und A_2' so bezogen sind, dafs jenen Strahlen $A_2\mathrm{A}^1$ und $A_2'\mathrm{A}$ zugehören.

Zwei einander entsprechende Ketten K_1 und K_1' der Ebenen A und A_1 sind projectivisch auf einander bezogen. Sie mögen von den Strahlen des Büschels B in den Paaren A_1C_1; A_2C_2; $A_3C_3\ldots$ und $A_1'C_1'$; $A_2'C_2'$; $A_3'C_3'\ldots$ getroffen werden. Da alsdann

$$A_1A_2A_3\ldots \barwedge C_1C_2C_3\ldots \quad \text{und} \quad A_1'A_2'A_3'\ldots \barwedge C_1'C_2'C_3'\ldots$$

ist, so genügt es zu zeigen, dafs

$$C_1C_2C_3\ldots \barwedge A_1'A_2'A_3'\ldots$$

ist. Die Tangenten der Ketten K_1 und K_1' in A_1 und C_1' sowie in C_1 und A_1' treffen sich auf α. Denn die Tangentenbüschel in A_1 und C_1' der Kettenbüschel A_1C_1 und $A_1'C_1'$ sind so bezogen, dafs Darstellungen von $A_1\mathrm{A}$ und $C_1'\mathrm{A}$ einander zugehören. Da nun A_1C_1, α eine beiden Büschel gemeinsame Kette ist, so sind die Tangentenbüschel perspectivisch und je zwei entsprechende schneiden sich auf α. Setzt man nun in zwei col-

linearen Ebenen B und die Punkte $\mathfrak{A}_\lambda$ von α sich selbst und $A_1 C_1'$ einander entsprechend, so gehören auch $C_1 A_1'$ einander zu. Denn allgemein ist

$$B A_\lambda C_\lambda \mathfrak{A}_\lambda \quad \overline{\wedge} \quad \mathfrak{A}_\lambda A_\lambda' C_\lambda' B ,$$

und daher

$$B A_\lambda C_\lambda \mathfrak{A}_\lambda \quad \overline{\wedge} \quad B C_\lambda' A_\lambda' \mathfrak{A}_\lambda .$$

Der Kette K_1 entspricht mithin collinear eine andere, die C_1' und A_1' enthält, und deren Tangenten in C_1' und A_1' sich mit denen von K_1 in A_1 und C_1 auf α schneiden. Diese Bedingungen erfüllt K_1', und nach § 5 nur diese Kette. Der Reihe $C_1 C_2 C_3$ auf K_1 entspricht daher eine projectivische Reihe auf K_1', deren einzelne Punkte mit jenen und B in gerader Linie liegen. Ist nun nicht immer neben

$$B A_\lambda C_\lambda \mathfrak{A}_\lambda \ \overline{\wedge} \ B C_\lambda' A_\lambda' \mathfrak{A}_\lambda \quad \text{auch} \quad B A_\lambda C_\lambda \mathfrak{A}_\lambda \ \overline{\wedge} \ B A_\lambda' C_\lambda' \mathfrak{A}_\lambda ,$$

so kann dies nur die Reihe $A_1' A_2' A_3' \ldots$ sein und dann ist auch

$$C_1 C_2 C_3 A_1 A_2 A_3 \ldots \quad \overline{\wedge} \quad C_1' C_2' C_3' A_1' A_2' A_3' \ldots$$

Bestehen aber beide Beziehungen gleichzeitig, so werden $A_\lambda' C_\lambda'$ durch B und $\mathfrak{A}_\lambda$ harmonisch getrennt; K_1 und K_1' haben daher beide hinsichtlich α den Pol B. In diesem Fall entsprechen die Kegelschnitt-Reihen $C_1 C_2 C_3 \ldots$ und $C_1' C_2' C_3'$ einander collinear in den Feldern, die B und α entsprechend gemein haben und in denen C_1 und C_1' einander zugehören. In den collinearen Gebilden werden je zwei entsprechende Punkte nicht getrennt durch B und den Schnittpunkt ihrer Verbindungslinien mit α. Diese Bedingung aber erfüllen nur C_λ und C_λ', nicht aber C_λ und A_λ'. Da jede Gerade der Ebene $\mathbf{A}$ und ihre entsprechende durch B gehende Kette der Ebene $\mathbf{A}_1$ zu demselben Strahlbüschel B perspectivisch sind, so sind auch diese Gebilde zu einander projectivisch.

Statt der Ebene $\mathbf{A}_1$ wird rückwärts die collineare Ebene $\mathbf{B}$ eingeführt. Da $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}^1$, sowie B und A homologe Punkte derselben sind, so entspricht zunächst jeder Kette von $\mathbf{A}_1$, also auch von $\mathbf{A}$, eine projectivische Kette von $\mathbf{B}$, einer Geraden von $\mathbf{A}_1$ und also einer durch B gehenden Kette von $\mathbf{A}$ eine projectivische Gerade in $\mathbf{B}$, endlich einer durch B gehenden Kette in $\mathbf{A}_1$ und folglich einer Geraden in $\mathbf{A}$ eine durch A gehende projectivische Kette von $\mathbf{B}$. Ferner sind projectivische Kettenbüschel $A_1 A_2$, $A_1' A_2'$, $B_1 B_2$ homologe Elemente der drei Ebenen $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$,

B; da in den Tangentenbüscheln der letzteren die Strahlen A_1'A[1] und B_1B, sowie A_2'A und B_2B[1] einander zugehören, so sind die vier Tangentenbüschel A_1, A_2, B_1, B_2 in der Art reell-projectivisch, daſs A_1A, A_2A[1], B_1B, B_2B[1] einander entsprechen. Damit ist der dem § 7 vorangestellte Satz völlig bewiesen, da das über die Hauptpunkte Gesagte bereits im § 8 bestätigt war.

§ 10. Wird ein Strahlbüschel mit reellem Centrum C, welches zu einer imaginären Geraden α perspectivisch ist, mit Hülfe einer zweiten imaginären Geraden β repräsentirt, so entsprechen den Tangenten einer Kette der Ebene α projectivisch die Tangenten einer Kette der Ebene β, Ketten-Schaaren $a_1 a_2$ der ersteren projectivische $b_1 b_2$ der zweiten Ebene, und zwar gehören in den reell-projectivischen Reihen der Berührungspunkte auf a_1, a_2 und b_1, b_2 die imaginären Punkte $a_1\alpha$, $a_2\alpha^1$, $b_1\beta$, $b_2\beta^1$ einander zu. Den Strahlbüscheln der Ebene α, zu denen ihr Hauptstrahl gehört, entsprechen auch in der zweiten Ebene Strahlbüschel, zu denen der Hauptstrahl derselben gehört. Die Reihen der Centren auf den beiden Hauptstrahlen sind so reell-projectivisch, daſs Schnitte von α und β' einander entsprechen.

Anm. Die Hauptstrahlen der Ebenen α und β sind in diesem Falle $C\mathfrak{B}$ und $C\mathfrak{A}$.

Der Satz folgt aus dem vorigen vermöge des Gesetzes der Reciprocität.

§ 11. Wenn ein Strahlbüschel mit reellem Centrum C von der imaginären Geraden β aus, und eine zu ihr perspectivische reelle Gerade c von einem imaginären Punkt A aus repräsentirt wird, so entsprechen den Tangenten einer Kette der Ebene β projectivisch die Punkte einer Kette der Ebene A. Einer Schaar der ersteren mit den reellen Grundstrahlen b_1 und b_2 entspricht ein Kettenbüschel, dessen reelle Grundpunkte A_1, A_2 jenen zugehören. Die Reihen der Berührungspunkte auf jenen und die Tangentenbüschel in diesen sind so reell-projectivisch, daſs die imaginären Punkte und Geraden $b_1\beta$, $b_2\beta^1$, A_1A und A_2A[1] einander zugehören. Strahlbüschel der β-Ebene, denen ihr Hauptstrahl i_1 angehört, entsprechen Punktreihen, denen der Hauptpunkt J_2 der zweiten Ebene angehört. Die Reihe der Centren und das Büschel der Träger sind so projectivisch, daſs Darstellungen von $i_1\beta$ und J_2A[1] einander entsprechen.

Man beziehe die Ebene der reellen Geraden c und des sie repräsentirenden Punktes A reciprok so auf eine Hülfsebene α, dafs den Punkten von c ihre Verbindungslinien mit C entsprechen, im Übrigen aber die Reciprocität ganz willkürlich ist. Dem imaginären Punkte A entspricht eine imaginäre Gerade α. An die Stelle eines imaginären Punktes von c tritt seine Verbindungslinie mit C, seinem repräsentirenden Punkt aber entspricht der Träger des Schnittpunktes der letzteren mit α. Zwischen den Ebenen α und β besteht die Beziehung des § 10, denn zwei imaginäre Geraden sind in Bezug auf einen reellen Punkt perspectivisch. Ihre Combination mit der reciproken Beziehung der Ebenen A und α ergiebt den Lehrsatz.

§§ 12—14. Unter den Repräsentationsebenen einer imaginären Geraden β und eines zu ihr perspectivischen Strahlbüschels mit imaginärem Centrum A besteht die Beziehung des § 11; nur ist der reelle Punkt $\mathfrak{B}$ von β der Hauptpunkt der Ebene A und der reelle Träger $\mathfrak{a}$ des letzteren der Hauptstrahl der Ebene β.

§ 12. Den von $\mathfrak{B}$ ausgehenden Geraden der Ebene A entsprechen Strahlbüschel mit dem Centrum auf $\mathfrak{a}$.

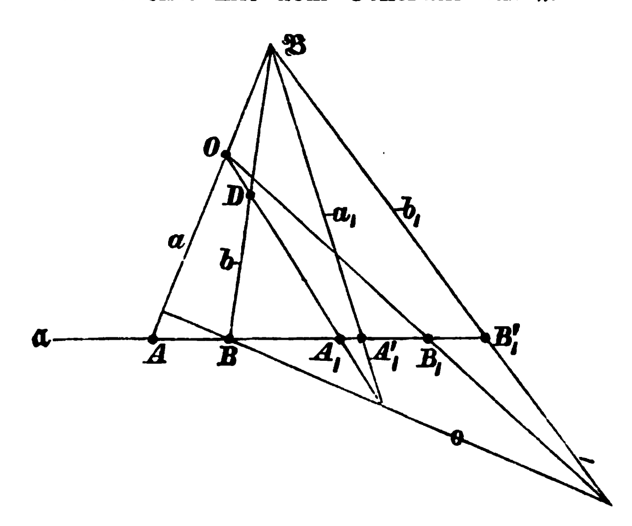


Fig. 3.

Sämmtlichen von $\mathfrak{B}$ ausgehenden Strahlen von β entspricht der einzige Punkt $\mathfrak{B}$ der Ebene A, allen Punkten der letzteren von $\mathfrak{a}$ die einzige Gerade $\mathfrak{a}$ der Ebene β. Bezieht man das Strahlbüschel $\mathfrak{B}$ und die Punktreihe $\mathfrak{a}$ so auf einander, dafs Darstellungen von β und A, sowie die in einander liegenden Elemente a und A einander zugehören, so liegen noch zwei andere entsprechende Elemente b und B in einander und es sind dann (Fig. 3)

$$a b a_1 b_1 \qquad \text{und} \qquad A B A_1 B_1$$

projectivische Darstellungen von β und A. Einem beliebigen Punkte O des Strahles a gehört die Gerade zu, welche zu $a b a_1 b_1$ und O $(A B A_1 B_1)$ zugleich perspectivisch ist, und die sich daher zu O projectivisch um B dreht. Jedem Strahl a gehört ein Punkt B in dieser Art zu.

Es sei $A B A_1' B_1'$ die zu $A B A_1 B_1$ projectivische Darstellung des Schnittpunktes B von β und $\mathfrak{a}$. Für einen Hülfspunkt Γ aufserhalb $\mathfrak{a}$ mögen A und B durch die reellen Punkte P und Q repräsentirt werden. Da die beiden projectivischen Reihen $A B A_1 B_1 \ldots \,\overline{\wedge}\, A B A_1' B_1' \ldots$ durch Anwendung nur reeller Hülfspunkte und Strahlen in einander übergeführt werden können, so folgt durch wiederholte Anwendung der §§ 7 und 11, dafs die Beziehung zwischen beiden Repräsentationsebenen durch § 7 geleistet wird. Jeder Kette AB der Ebene Γ mufs daher eine Kette AB zugehören. Die entsprechenden Reihen $A B A_1 B_1$ und $A B A_1' B_1'$ liegen aber in derselben Kette und daher enthält jede Kette AB entsprechende Punkte; auf einer solchen liegen auch P und Q. Jedes Punktepaar AB wird mithin von einer reellen Kette PQ der Ebene Γ ausgeschnitten und gehört also einer bestimmten Involution J an. Eine der Ketten hat ihren Pol bezüglich $\mathfrak{c}$ auf $\mathfrak{a}$ und schneidet in Folge dessen ein Paar aus, welches den drei Involutionen A, B und J gemeinsam ist. Ein anderes Paar der Involution J wird durch PQ und $\mathfrak{c}$ ausgeschnitten. Gelangt A in den Punkt M, welcher in der Involution A zum Schnittpunkt $\mathfrak{a}$, PQ gehört, so fällt B mit dem Punkte N zusammen, welcher mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ ein Paar der Involution B bildet. PM und PQ nämlich (Fig. 4), sowie NM und NQ treffen $\mathfrak{c}$ in einem Punktepaar der Involution Γ, und daher (§ 4) liegen MN mit PQ in einer Kette der Ebene Γ. Da auch das gemeinschaftliche Paar der Involutionen A und B der dritten J angehört, so entspricht jedem Paare der Involution B in der A-Reihe ein Paar der Involution A in der B-Reihe, jeder Darstellung von B entweder eine solche von A oder von A^1. P und Q liegen aber zu verschiedenen oder gleichen Seiten von $\mathfrak{a}$, je nachdem A und B verschiedenen oder gleichen Sinnes sind. Im ersten Falle sind A und B

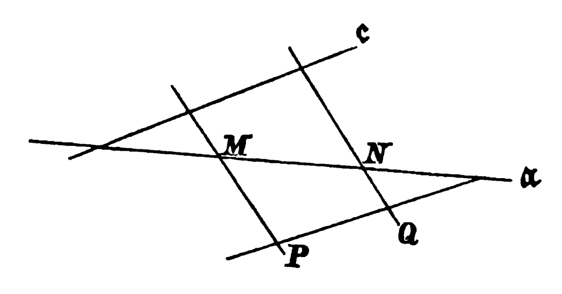


Fig. 4.

gleichläufig, im letzteren aber ungleichläufig. Daher entspricht der Punkt A^1 dem Punkte B. Die Geraden a der Ebene A sind also auf die Centren B der entsprechenden Strahlbüschel der Ebene β so bezogen, dafs den Strahlen $\mathfrak{B}\mathrm{A}$ und β der einen die Punkte $\mathfrak{a}\beta^1$ und A^1 der anderen entsprechen.

§ 13. Es giebt Geraden der Ebene A, denen die Tangenten einer Kette der Ebene β entsprechen. Sie berühren alle den Hauptstrahl $\mathfrak{a}$ der letzteren. Die Gerade OA_1 der Figur 3 (S. 32) ist eine solche. Dem Punkte O entspricht die Gerade o, der B; OA_1, a_1 und OB_1, b_1 angehören, dem Punkte A_1 aber die Gerade $\mathfrak{a}$. Dem Schnittpunkt D von OA_1 mit b gehört die Verbindungslinie von A mit o, a_1 zu. Denn es sind auch BA_1B_1A und ba_1b_1a projectivische Darstellungen der Elemente A und β und die gesuchte Gerade ist also zu $D(BA_1B_1A)$ und ba_1b_1a gleichzeitig perspectivisch. Durch den Schnittpunkt von DA_1 oder OA_1 mit a_1 geht aber auch o. Da auch A der Geraden angehört, so werden ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{a}$ und o von $\mathfrak{B}$ aus durch das Geradenpaar aa_1 projicirt. Ist nun der Satz richtig, so müssen die Geraden, welche Punkten von OA_1 entsprechen, auf $\mathfrak{a}$ und o projectivische Reihen ausschneiden und $\beta\beta^1$ die Doppelstrahlen der Büschel sein, die sie von $\mathfrak{B}$ aus projiciren. Da in letzteren a und a_1 einander entsprechen, so müssen auch alle anderen Paare der Involution β auf a und o zusammengehörige Punkte bestimmen.

Folgende Construction führt nach § 12 zu einem Paare zusammengehöriger Elemente. Es sei X ein Punkt von $\mathfrak{a}$. Es mögen x, y, z $\mathfrak{B}X$ zu Paaren der Involutionen β, $\mathfrak{B}\mathrm{A}$, $\mathfrak{B}J$ ergänzen; Y und Z seien die Schnittpunkte y, $\mathfrak{a}$ und z, OA_1. Ist X_1 der Schnittpunkt von YZ mit x, so gehört XX_1 dem Punkte Z zu. Ist andererseits X' der Schnittpunkt von YZ mit o, so sind XX' und Z entsprechend, wenn X und X' von $\mathfrak{B}$ aus durch ein Paar der Involution β projicirt werden.

y und z bewegen sich involutorisch, und folglich Y und Z projectivisch zu $\mathfrak{B}X$. Der deshalb von YZ umhüllte Kegelschnitt mufs auch o berühren. Aus

$$ABA_1B_1 \;\overline{\wedge}\; ABA_1'B_1'$$

folgt auch

$$ABA_1B_1 \;\overline{\wedge}\; BAB_1'A_1' \; .$$

Da der letztere Wurf eine Darstellung von B' ist, so sind (§ 12) auch

$A_1 B_1'$ und $B_1 A_1'$ zwei Paare der Involution J. Läfst man nun Z in den Schnittpunkt der drei Geraden o, $A_1 O$ und a_1 oder $\mathfrak{B}A_1'$ gelangen (§ 12), so mufs X mit B_1, Y mit B und YZ mit o zusammenfallen. Die Reihen X und X' sind daher zu einander projectivisch. Wir wissen bereits, dafs das Strahlenpaar aa_1 auf $\mathfrak{a}$ und o zwei zusammengehörige Punkte X und X' ausschneidet. Läfst man X nach B fallen, so geht Z in O, Y in B_1 über. OB_1 mufs sich mit b_1 (§ 12) auf o treffen. bb_1 schneidet daher ein zweites Paar XX' aus. Gelangt umgekehrt X nach B_1', so fällt Z mit A_1 zusammen, Y aber liegt irgendwo auf $\mathfrak{a}$. Beider Verbindungslinie $\mathfrak{a}$ trifft o in B. Somit werden drei Paare entsprechender Punkte XX' durch die Strahlenpaare aa_1, bb_1, $b_1 b$ der Involution β projicirt, jedes andere Paar derselben schneidet mithin die Punkte einer Tangente auf $\mathfrak{a}$ und o aus. Die Strahlen, die den Punkten der Geraden OA_1 zugehören, umhüllen eine Kette der Ebene β, welche von $\mathfrak{a}$ im Punkte B_1' berührt wird. Die Schnittpunkte (X) der Tangenten mit $\mathfrak{a}$ sind auf ihre entsprechenden Punkte mit Hülfe der Involution $\mathfrak{B}J$ bezogen.

§. 14. Man bezieht nun die Ebene β dergestalt reciprok auf eine Hülfsebene A_1, dafs die Träger $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{a}$ und die durch die Involution J vermittelten Darstellungen des Strahles β^1 und des Punktes A einander wechselseitig zugehören, dafs endlich dem Strahl o der Ebene β, wie in der Ebene A, auch in der Ebene A_1 der Punkt O entspricht. Paare entsprechender Punkte von A und A_1 liegen involutorisch angeordnet auf Geraden, die von $\mathfrak{B}$ ausgehen; diesem Punkte jeder Geraden entspricht ihr Schnittpunkt mit $\mathfrak{a}$. Der Geraden OA_1 gehört die Kette K_1 zu, welche O enthält und $\mathfrak{B}A_1$ in $\mathfrak{B}$ berührt. Die Beziehung zwischen den Ebenen A und A_1 ist vollständig bestimmt. Entspricht die Kette K punktweise sich selbst, welche den Punkt O enthält und $\mathfrak{B}$ zum Pole von $\mathfrak{a}$ hat, so ordnet die dann statthafte Beziehung der Ebenen A und A_1 des § 9 die Gerade OA_1 und die Kette K_1 einander zu und setzt überdies entsprechende Punktepaare der Geraden $\mathfrak{B}$ in Involution. Die neue Hülfsbeziehung deckt sich also mit der im § 9 ausführlich erläuterten. Indem man sie mit der reciproken Beziehung zwischen β und A_1 combinirt, erhält man unter den Repräsentations-Ebenen β und A den im § 11 angezeigten Zusammenhang.

§ 15. Bezieht man aus einer Reihe von abwechselnd Punkten und Geraden jedes folgende Glied perspectivisch auf das vorhergehende und repräsentirt man jedes einzelne Gebilde mit Hülfe eines imaginären Punktes oder einer imaginären Geraden, so gilt für je zwei aufeinanderfolgende Repräsentations-Ebenen eine der in den §§ 7, 10 und 11 angegebenen Beziehungen. Auch für zwei in die allgemeinste projectivische Beziehung gesetzte einförmige Gebilde liefert daher einer dieser drei Sätze den Ausdruck. Sie lassen sich etwa in folgender Weise zusammenfassen: Werden zwei einförmige projectivische Gebilde von zwei imaginären Grundelementen (A und B) aus repräsentirt, so entspricht jeder Kette eine projectivische, jedem durch zwei Elemente (A_1 und A_2) der einen Ebene bestimmten einfachen System projectivisch das durch die zugehörigen Elemente (B_1 und B_2) bestimmte. Die Grundelemente bestimmen auf zwei entsprechenden der vier festen Elemente (A_1 und B_1) und ihre conjungirten auf den beiden übrigen homologe Gebilde (A_1A, A_2A^1, B_1B, B_2B^1). Die Hauptelemente gehören unendlich vielen Paaren entsprechender einförmiger Gebilde an. Die Träger derselben sind so projectivisch bezogen, dafs das erste Grundelement und das conjungirte zum zweiten homologe Elemente bestimmen.

Besonders einfach ist die Beziehung zwischen zwei Büscheln mit demselben Kreispunkt zum Centrum. Es entsprechen einander projectivische Kreise und Kreisbüschel. In den Tangentenbüscheln in entsprechenden Punkten gehören projectivische Darstellungen der Geraden einander zu, die nach dem betreffenden Kreispunkt führen. Da mithin zwei senkrechten Strahlen des einen Büschels zwei senkrechte im anderen entsprechen, tritt dies dann und nur dann ein, wenn die beiden Strahlbüschel congruent und gleich gerichtet sind. In den beiden übrigen Grundpunkten sind die Tangentenbüschel mit jenen congruent, aber entgegengesetzt gerichtet. Die Hauptpunkte der beiden Ebenen entsprechen der unendlich fernen Geraden. Jeder Geraden, welche den einen enthält, entspricht eine projectivische und von dem anderen ausgehende. Sie bilden congruente, aber entgegengesetzt gerichtete Büschel.

Haben zwei projectivische Büschel die beiden verschiedenen Kreispunkte zu Centren, so ist nur „gleich“- und „entgegengesetzt-gerichtet“ in dem vorstehenden Ausspruch zu vertauschen.

§ 16. Sollen irgend zwei einförmige Gebilde projectivisch auf einander bezogen werden, so kann man noch drei verschiedenen Elementen (ABC) des ersten die entsprechenden $(A_1 B_1 C_1)$ des zweiten Gebildes beliebig zuweisen; jedem anderen Element des ersteren ist alsdann ein bestimmtes Element des letzteren zugeordnet[12].

Zusatz 1. Entspricht zwei Elementen AB dasselbe Element A_1 der anderen Reihe, einem dritten C aber ein von A_1 verschiedenes Element C_1, so gehört jedes Glied der ersteren Reihe dem Element A_1 und jedes der letzteren dem Element C zu.

Zusatz 2. Sind in zwei Reihen desselben Trägers irgend drei Elementen der ersteren ihre entsprechenden genügend genähert, so rückt jedem anderen sein entsprechendes Element so nahe, als man nur immer will.

Die beigefügten Bezeichnungen beziehen sich auf den Fall zweier projectivischer Geraden l und l_1, auf den man nöthigenfalls durch Projection alle übrigen zurückführen kann. Auf der reellen oder imaginären Geraden AA_1 nehmen wir P und Q an. Es mögen PB und QB_1 in R, PC und QC_1 in S sich schneiden. Bezieht man auf RS die Strahlbüschel P und Q, auf diese aber beziehlich die Geraden l und l_1 perspectivisch, so entsprechen in den entstehenden projectivischen Reihen ABC und $A_1 B_1 C_1$ einander. Liefse sich nun auf das Gebilde $ABC\ldots$ in mehr als einer Weise das Gebilde $A_1 B_1 C_1 \ldots$ beziehen, so würden auf der letzteren Geraden zwei nicht zusammenfallende Reihen drei Elemente $A_1 B_1 C_1$ entsprechend gemeinsam haben. Es mögen letztere von einem imaginären Punkt A aus projicirt werden, und es seien $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1 \ldots$ und $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1' \ldots$ entsprechende Punkte der beiden Repräsentationsebenen. Dann mufs die Kette $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1$ sich selbst

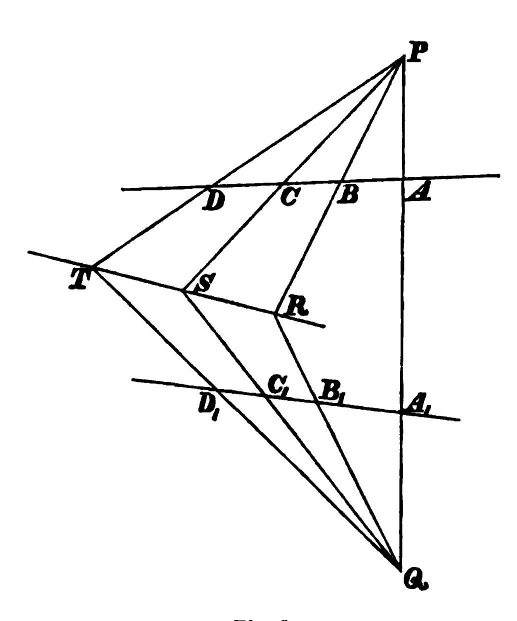


Fig. 5.

Punkt für Punkt entsprechen. Ferner müssen irgend zwei entsprechende Punkte derselben Kette $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ angehören, da es keine zwei verschiedene projectivische Darstellungen des Strahles $\mathfrak{A}_1 \mathrm{A}$ geben kann, die von der Tangente der Kette $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ ausgehen. Ebenso müssen aber entsprechende Punkte derselben Kette $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1$ angehören und daher zusammenfallen. Um den Zusatz 2 für eine Gerade zu beweisen, beziehe man auf die Reihen $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$ derselben Geraden l eine dritte $A_2B_2C_2\ldots$ einer anderen Geraden l_1. Das Geradengefüge, welches $A_2B_2C_2$ zu ABC in Beziehung setzt, braucht, damit $A_1B_1C_1\ldots$ und $A_2B_2C_2\ldots$ einander entsprechen, um so weniger verschoben werden, je näher $A_1B_1C_1$ bei ABC liegen. Je zwei einander nahe liegende Geraden bestimmen daher zwei entsprechende Punkte der Reihen auf l und diese liegen also benachbart (§ 6). Mit Hülfe des § 6 folgt auch, dafs projectivische einförmige Gebilde stetig auf einander bezogen sind, dafs also, wenn $ABCD \barwedge A_1B_1C_1D_1$ ist, D_1 an C_1 beliebig heranrücken mufs, wenn C und D einander genügend genähert werden.

Wird die Anordnung des Zusatzes 1 getroffen, so fällt R mit P und RS mit PC zusammen, jedem von C verschiedenen Punkte von l gehört daher nur A, dem Punkte C aber jeder Punkt von l_1 zu.

§ 17. Zu irgend zwei Punkten A und B einer Punkt-Repräsentationsebene kann man eine Schaar beigeordneter Ketten finden, die nämlich jeden Kettenbogen AB einmal treffen und so, dafs beide Tangenten ein Paar der Involution des Grundpunktes ausschneiden; ihre Schnittpunkte mit irgend einer Kette AB werden durch A und B harmonisch getrennt. Durch einen Punkt C geht nur eine solche Kette.

Man beziehe auf das Gebilde $\mathrm{A}A, \mathrm{A}B\ldots$ projectivisch ein anderes mit demselben Centrum, bei welchem dem Strahle $B\mathrm{A}$ der reelle Strahl $\mathfrak{a}$ zugehört. Dem Kettenbüschel AB entspricht dann ein Strahlbüschel A_1. Eine Kette, für welche A_1 der Pol von $\mathfrak{a}$ ist, und nur eine solche erfüllt die Bedingung, dafs in jedem ihrer Punkte B_1 die Tangente mit B_1A_1 ein Paar der Involution des Grundpunktes A ausschneidet. Ihr entspricht eine Kette der in Rede stehenden Schaar.

§ 18. Wenn drei Strahlen $\mathrm{A}A_1, \mathrm{A}A_2, \mathrm{A}A_3$ eines Büschels die Strahlen $\mathrm{B}B_1, \mathrm{B}B_2, \mathrm{B}B_3$ eines zweiten projectivischen zugehören, so ent-



spricht dem Halbkettenbüschel $A_1 A_2$ der Ebene A projectivisch das Halbkettenbüschel $B_1 B_2$ der Ebene B derart, dafs in den Tangentenbüscheln A_1, B_1, A_2, B_2 Darstellungen der Strahlen A_1A, A_2A^1, B_1B, B_2B^1 einander zugehören, dafs ferner die Halbketten $A_1 A_3 A_2$ und $B_1 B_3 B_2$ einander und vier in einerlei Sinn folgenden Halbketten $A_1 A_2$ vier in einerlei Sinn folgende Halbketten $B_1 B_2$ entsprechen. Den A_1 und A_2 beigeordneten Ketten entsprechen B_1 und B_2 beigeordnete. Auf irgend zwei Halbketten $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ entstehen dabei projectivische Punktreihen.

Der Lehrsatz folgt unmittelbar aus den §§ 15, 16 und 17. Vier in einerlei Sinn folgenden Halbketten $A_1 A_2$ entsprechen vier auf einander folgende Halbketten, weil die beiden Felder $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ auf einander stetig bezogen sind. Ohne diesen Zusatz würde die Beziehung noch eine zweideutige sein, indem nur die Tangenten entsprechender Ketten $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ gegeben sein würden, diese aber von den bezüglichen beigeordneten Ketten in je zwei Punkten geschnitten werden. Der Zusatz aber bedingt, dafs den Halbtangenten eines gestreckten Winkels bei A_1 diejenigen eines bestimmten gestreckten Winkels bei B zugehören. Dadurch ist dann, weil den Halbketten $A_1 A_3 A_2$ und $B_1 B_3 B_2$ bestimmte Halbtangenten in A_1 und B_1 zukommen, jeder Halbkette eine Halbkette, jedem Punkte der Ebene A ein Punkt der Ebene B zugewiesen, da noch jeder A_1 und A_2 beigeordneten Kette eine B_1 und B_2 beigeordnete entspricht.

§ 19. Aus dem Vorstehenden resultirt folgendes wesentliche Princip. Die ganze Reihe derjenigen Resultate, welche für nur reelle Geraden und Punkte, jedoch allein durch Betrachtung projectivischer einförmiger Gebilde abgeleitet sind, gelten ganz ebenso allgemein, wenn imaginäre Elemente eingeführt werden.

Beispiel: Sind den projectivischen Reihen

$$1)\ ABCD\ldots \barwedge ABC'D'\ldots \barwedge ABC''D''\ldots$$

die Elemente AB entsprechend gemeinsam, so sind auch die Reihen homologer Punkte projectivisch und haben die Elemente A und B entsprechend gemeinsam

$$2)\ ABCC'C''\ldots \barwedge ABDD'D''\ldots \barwedge ABEE'E''\ldots$$

Die ersteren Reihen seien Punktreihen und auf eine andere $A_1 B_1 C_1 D_1$ nach Figur 5 (S. 37) projectivisch bezogen. An derselben braucht nur

RST projectivisch zu $ABC'C''C'''$ um R gedreht zu werden, um alle diese Beziehungen herzustellen. Die perspectivischen Reihen, die so auf QC_1, QD_1, QE_1... entstehen, werden von P aus in die Reihen 2 projicirt.

§§ 20 und 21. Zwei einförmige projectivische Gebilde mit demselben Träger haben zwei Elemente entsprechend gemein[13].

§ 20. Wären den Gebilden mehr als zwei Elemente gemeinsam, so müfsten sie zusammenfallen. Es braucht nur der Fall zweier Strahlbüschel mit demselben Centrum A, das im Unendlichen liegt, betrachtet zu werden, da hierauf alles durch Projection zurückkommt. Es seien J_1 und $\mathfrak{J}_2$ die Hauptpunkte der beiden Ebenen, denen also in je der anderen Ebene die unendlich ferne Gerade zugehört. In den Halbstrahlenbüscheln $\mathfrak{J}_2$ und J_1 entsprechen einander Theile von Darstellungen der Strahlen J_1A und $\mathfrak{J}_2$A^1 und es werden dabei die Halbstrahlen gestreckter Winkel einander zugewiesen (§ 18). Den Ketten mit dem Mittelpunkt J_1 entsprechen solche mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{J}_2$ und zwar den sehr eng um J_1 zusammengeschlossenen sehr grofse Ketten der anderen Schaar. Da auf irgend zwei Halbstrahlen J_1 und $\mathfrak{J}_2$ projectivische Reihen sich ergeben, so entsprechen stetige Folgen solcher Ketten einander. In jedem beiden Feldern entsprechend gemeinen Punkte beider Reihen schneiden sich zwei entsprechende Halbstrahlen J_1 und $\mathfrak{J}_2$ und zwei entsprechende um sie beschriebene Ketten. Jeder Punkt aber, wo diese beiden Eigenschaften erfüllt sind, repräsentirt einen entsprechend gemeinsamen Strahl.

Die gesuchten Punkte liegen zuerst auf Theilen einer Hyperbel, deren Asymptoten ein Paar der Involution A projiciren und die durch zwei projectivische Strahlbüschel J_1 und $\mathfrak{J}_2$ erzeugt wird, in denen Darstellungen von J_1A und $\mathfrak{J}_2$A^1 einander entsprechen. Ihr Mittelpunkt fällt mit dem der Strecke $J_1\mathfrak{J}_2$ zusammen. Zwei projectivische Reihen nämlich liegen involutorisch, wenn in ihnen Darstellungen der Punkte A und A^1 sich entsprechen; je zwei zugehörige Punkte trennen alsdann ein Paar der Involution A harmonisch (§ 2a). Sind daher i und j zwei entsprechende Strahlen der Büschel J_1 und $\mathfrak{J}_2$, so müssen, weil A im Unendlichen liegt, auch die i und j parallelen, aber von $\mathfrak{J}_2$ und J_1 ausgehenden Strahlen einander entsprechen. J_1 und $\mathfrak{J}_2$ liegen auf verschiedenen Theilen der

Hyperbel. Läſst man einen Punkt A des ersteren, in dem entsprechende Halbstrahlen sich treffen, auf der Curve stetig fortschreiten, ohne J_1 zu erreichen, so bewegen auch die nach J_1 und $\mathfrak{J}_2$ führenden Halbstrahlen sich stetig und bleiben daher entsprechend. Alle so erreichbaren Punkte gehören also der betrachteten Curve an. Überschreitet der bewegliche Punkt J_1, so bewegt sich j stetig, i aber springt aus einer Richtung der Tangente in J_1 in die entgegengesetzte über. In den anderen Punkten des Theiles, zu dem J_1 gehört, schneidet daher jeder Halbstrahl i den entgegengesetzten seines entsprechenden. Einer der Theile, in die J_1 seinen Zug der Hyperbel zerlegt, gehört der untersuchten Curve an, und entsprechend einer der Theile, in die $\mathfrak{J}_2$ den seinigen zerlegt. Die erstere Reihe sich schneidender Halbstrahlen wird durch zwei zu einer Halbasymptote parallele Halbstrahlen abgeschlossen. Auch die ihnen entgegengesetzten Halbstrahlen entsprechen einander und begrenzen daher die andere Reihe sich schneidender Halbstrahlen. Die Curve besteht aus zwei Zügen, die, von J_1 und $\mathfrak{J}_2$ ausgehend, den entgegengesetzten Richtungen einer Asymptote sich anschlieſsen. Nur wenn $J_1\mathfrak{J}_2$ und $\mathfrak{J}_2 J_1$ einander entsprechen, können beide Curventheile einen Punkt gemeinsam haben. Die Hyperbel enthält dann $J_1\mathfrak{J}_2$ und die von M ausgehende Gerade, die mit ihr ein Paar der Involution des Grundpunktes ausschneidet. Die in Rede stehende Curve besteht aus den einmal bei M gebrochenen Zügen, die von J_1 und $\mathfrak{J}_2$ aus in's Unendliche führen. Beide haben nur den Punkt M gemeinsam. Man kann $J_1 M$ durch einen beliebigen der Theile ergänzen, in die durch M die andere Gerade zerlegt wird; $\mathfrak{J}_2 M$ muſs dann mit dem anderen zusammengestellt werden.

§ 21. Wir lassen nun einen Punkt den von J_1 ausgehenden Zweig durchlaufen. In jeder Lage desselben schneiden sich zwei um J_1 und $\mathfrak{J}_2$ beschriebene Ketten. Für die gesuchten Coincidenzpunkte sind dieselben entsprechende Glieder der projectivischen Reihen. Die $\mathfrak{J}_2$-Kette muſs für sie mit der anderen, welche der J_1-Kette entspricht, identisch sein. Läſst man den beweglichen Punkt von J_1 aus stetig in die Unendlichkeit gehen, so ändern sich auch die beiden $\mathfrak{J}_2$-Ketten stetig. Die beständig durch den beweglichen Punkt gehende hat zur Anfangslage die durch J_1 gehende Kette, kann n i c h t in den Punkt $\mathfrak{J}_2$ ausarten,

und wird, wenn sich der bewegliche Punkt genügend weit von J_1 entfernt, so grofs, wie man nur immer will. Die andere $\mathfrak{J}_2$-Kette, welche der J_1-Kette durch den beweglichen Punkt projectivisch entspricht, ist für genügend nahe bei J_1 gewählte Punkte so grofs, wie man nur immer will, verändert sich ebenfalls stetig, und wird so klein, wie man nur immer will, für genügend entfernte Lagen des beweglichen Punktes. Wir wollen eine Endlage desselben so wählen, dafs die zugehörige zweite $\mathfrak{J}_2$-Kette c_1 innerhalb der kleinsten $\mathfrak{J}_2$-Kette der ersten Art liegt. Wir wollen eine Anfangslage des Punktes so nahe bei J_1 wählen, dafs die zugehörige zweite $\mathfrak{J}_2$-Kette c_2 alle ersten $\mathfrak{J}_2$-Ketten umschliefst, die bis zur gewählten Grenzlage möglich sind. Während die zweite $\mathfrak{J}_2$-Kette einen stetigen Übergang von c_1 zu c_2 macht, geht die zweite, ohne die Grenzlagen c_1 und c_2 zu erreichen, von einer zwischen beiden gelegenen Anfanglage c'_1 zu einer ebenfalls zwischen c_1 und c_2 gelegenen Endlage c'_2 über. Daher mufs es wenigstens eine Kette geben, die c_1 ein- und c_2 ausschliefst, und in der eine erste mit einer zweiten $\mathfrak{J}_2$-Kette zusammenfällt. Mit ihrer entsprechenden J_1-Kette schneidet sie sich auf dem von J_1 ausgehenden Zweige der ersteren Curve in wenigstens einem Punkte. Auf dem von J_1 und ebenso auf dem von $\mathfrak{J}_2$ ausgehenden Zweige der ersteren Curve giebt es also wenigstens einen Coincidenzpunkt, so dafs ihrer im Allgemeinen genau (§ 20) zwei vorhanden sind. Besteht die Curve aus zwei einmal gebrochenen Zweigen, und ist der Mittelpunkt M selbst ein Coincidenzpunkt der beiden Reihen, so ist kein zweiter vorhanden. Da aber bei projectivischen Reihen, die einen Coincidenzpunkt bei M haben, es noch einen zweiten ebenfalls bei M gelegenen giebt, so können wir sagen, dafs in diesem besonderen Falle bei M zwei Doppelpunkte vereinigt liegen.

Zweites Capitel. §§ 22–76.

Die Involutionen.

Erster Abschnitt.

Die Involutionen zweiter Ordnung. §§ 22—30.

§ 22. Wenn in zwei projectivischen einförmigen Gebilden desselben Trägers irgend zwei Elemente (AA_1) einander wechselseitig entsprechen, so entsprechen je zwei zusammengehörige Elemente einander wechselseitig.

Zu irgend einem Punkte M einer Geraden sei M_1 der zugehörige in der zweiten Reihe, diesem aber entspreche in der zweiten Reihe M_2. Auch die Punkte M und M_2 durchlaufen projectivische Reihen. Dieselben haben A und A_1, sowie die Doppelpunkte (§ 21) der gegebenen Reihen, wenigstens also drei Punkte entsprechend gemeinsam. Die Reihen sind daher identisch, und irgend zwei zusammengehörige Punkte B und B_1 der gegebenen Reihen entsprechen einander wechselseitig.

§ 23. Eine eigentliche Involution besteht aus den Paaren, die bei zwei wechselseitig projectivisch entsprechenden Reihen desselben Trägers einander zugehören. Sie hat zwei getrennte Doppelelemente. Werden bei einer Strahleninvolution mit imaginärem Centrum dieselben durch D_1 und D_2 repräsentirt, so schneidet jede durch sie gehende Kette sich mit jeder D_2 und D_1 beigeordneten Kette in dem repräsentirenden Punktepaar AA_1 eines Strahlenpaares der Involution.

Die Involution hat (§ 20) wenigstens einen Doppelstrahl $D_1\mathrm{A}$. Die Kette D_1AA_1 entspricht sich selbst, da diesen Punkten D_1, A_1 und A zugehören. Da nun (§ 15) auf dieser Kette entsprechende Punkte reell-involutorisch liegen, so entspricht auch D_2, der durch A und A_1 von D_1 harmonisch getrennte Punkt, sich selbst. Die Halbkette D_1AD_2 und ihre

ergänzende $D_1 A_1 D_2$, überhaupt also zwei ergänzende Halbketten (§ 18) $D_1 D_2$ gehören einander zu. Jede D_1 und D_2 beigeordnete Kette schneidet auf jeder durch D_1 und D_2 gehenden ein Punktepaar der Involution aus, denn diese Schnittpunkte (§ 17) werden durch D_1 und D_2 harmonisch getrennt.

Wenn D_1 und D_2 zusammenfallen sollen, so mufs von AA_1 und folglich (§ 16, Zusatz 1) auch von jedem anderen Paar ein Punkt mit D_1 zusammenfallen.

Wenn das Centrum der Involution einer der cyclischen Punkte der Ebene ist, so sind die Punktepaare Schnitte von Kreisen des Büschels DD_1 mit ihren Orthogonal-Kreisen.

§§ 24—26. Wenn in zwei projectivischen Gebilden desselben Trägers den festen Elementen A_1, B_1 des einen stets die festen Elemente B_2, A_2 des anderen entsprechen, einem dritten Element C aber andere und andere $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \mathfrak{C}_4 \ldots$ zugeordnet werden, so sind die jedesmaligen Doppelpunkte Paare der Involution $A_1 A_2$; $B_1 B_2$. Diese letzteren Gruppen ergeben sich, wenn $\mathfrak{C}$ mit A_2 und B_2 zusammenfällt. Jedem Paare der Involution gehört bei der bestimmten Erzeugungsweise ein Element $\mathfrak{C}$ zu. Die verschiedenen Reihen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \mathfrak{C}_4 \ldots$ und $\mathfrak{C}_1', \mathfrak{C}_2', \mathfrak{C}_3', \mathfrak{C}_4' \ldots$, welche einer gegebenen Anordnung der Involution entsprechen, sind sämmtlich unter einander projectivisch. Zu ihnen wird daher die Involution projectivisch gesetzt werden[14].

Fällt in der obigen Erzeugungsweise A_1 mit B_2 zusammen, so beschreibt der andere veränderliche Doppelpunkt ein mit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \mathfrak{C}_4 \ldots$ projectivisches einförmiges Gebilde.

§ 24. Folgendes ergiebt sich unmittelbar mit Hülfe des § 19 aus bekannten, auf reelle Gebilde bezogenen Sätzen: Als Kegelschnitt wird der Ort der reellen oder imaginären Punkte der Ebene bezeichnet, wo sich entsprechende Strahlen zweier projectivischer Büschel mit reellen oder imaginären Centren Α und Β treffen. Sind Γ und Δ irgend zwei so entstandene Punkte, so kann der Kegelschnitt auch durch zwei projectivische Strahlbüschel mit den Centren Γ und Δ erzeugt werden. Durch fünf beliebige Punkte ist derselbe daher bestimmt. Da seine Strahlbüschel auf

irgend einer Geraden a zwei projectivische Reihen bestimmen, so hat der Kegelschnitt mit jeder beliebigen Geraden zwei getrennte oder zusammenfallende Punkte gemeinsam. Die Geraden, für welche das letztere eintritt, sind Tangenten des Kegelschnittes. Jedem Curvenpunkt Γ gehört eine Tangente zu; bei der Erzeugung von Γ und Δ aus entspricht sie dem Strahle $\Delta\Gamma$. Auf irgend zwei festen Tangenten schneiden die übrigen projectivische Reihen aus. Daher gehen von jedem reellen oder imaginären Punkte der Ebene an den Kegelschnitt zwei verschiedene oder zusammenfallende Tangenten. Letzteres tritt nur für Punkte des Kegelschnittes selbst ein.

§ 25. Die Punktepaare, in welchen die von einem Punkte Ω ausgehenden Geraden einen Kegelschnitt treffen, werden von einem beliebigen Punkte A desselben aus durch die Strahlenpaare einer Involution projicirt.

A sei ein imaginärer Punkt. Von Ω aus lassen sich an den Kegelschnitt zwei Tangenten legen. Ihre Berührungspunkte Δ und Δ_1 sind die Centren zweier Strahlbüschel, die den Kegelschnitt erzeugen. Die Doppelstrahlen der Büschel A, welche zu ihnen bezüglich einer beliebigen von Ω ausgehenden Geraden perspectivisch sind, führen nach den Schnittpunkten der letzteren mit dem Kegelschnitte. Nun sind aber $\Delta\mathrm{A}$ und $\Delta_1\mathrm{A}$ entsprechende Strahlen der beiden ersteren und also auch der beiden concentrischen Büschel. Ihre reellen Punkte D_1 und D_2 gehören in den repräsentirenden Ebenen einander zu. Bei der Erzeugung des Kegelschnittes entsprechen ferner $\Delta\Omega$ und $\Delta_1\Delta$, sowie $\Delta_1\Omega$ und $\Delta\Delta_1$ einander. Auf der Geraden o entsteht daher eine Involution; nach ihren Schnittpunkten führen mithin die Doppelstrahlen $\mathrm{A}A_1$; $\mathrm{A}A_2$ einer Involution, von der $\mathrm{A}D_1$, $\mathrm{A}D_2$ ein Paar ist. A_1 und A_2 liegen also mit D_1 und D_2 auf einer Kette und trennen diese harmonisch. Ihrerseits bilden $\mathrm{A}A_2$, $\mathrm{A}A_2$ ein Paar der Involution mit den Doppelstrahlen $\mathrm{A}D_1$ und $\mathrm{A}D_2$.

§ 26. Wir erzeugen nun den Kegelschnitt durch die zu ihm perspectivischen und daher unter sich projectivischen Strahlbüschel B und Γ. Die Doppelstrahlen der Büschel, welche zu jenen bezüglich der von Ω ausgehenden Geraden perspectivisch sind, führen nach ihren Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt. AB und $\mathrm{A}\Gamma$ sind, da sie bei der Erzeugung des letzteren einander entsprechen, zugehörige Geraden der Büschel A. B_1, Γ_1 seien die

zweiten Schnittpunkte von ΩB und ΩΓ. Sollen nun, wie es der Satz verlangt, auch $A\Gamma_1$ und AB_1 einander zugehören, so müssen für einen Curvenpunkt Φ sowohl $A\Gamma_1$ und BΦ, als auch AB_1 und ΓΦ auf der bestimmten von Ω ausgehenden Geraden sich schneiden. Durch die erstere Forderung wird Φ bestimmt; die letztere ist erfüllt, da nach Pascal's Lehrsatz (§ 19) Ω oder $(BB_1, \Gamma\Gamma_1)$; $(B\Phi, A\Gamma_1)$; $(\Gamma\Phi, AB_1)$ derselben Geraden angehören müssen.

Zu irgend einem festen Strahle α des ersten Büschels A erhalten wir den entsprechenden α_1, wenn wir den Schnittpunkt $o\alpha$ mit B verbinden, den Schnittpunkt des zugehörigen von Γ ausgehenden Strahles mit o aber wieder mit A. Mit o bewegen bei festbleibenden α die Strahlen um B und Γ sich projectivisch. Letzteres Büschel erzeugt mit o einen zweiten Kegelschnitt K_1, dem auch A angehört, weil ΩA, BA und ΓA einander zugehören. Das zum Kegelschnitt K_1 perspectivische Strahlbüschel A wird von α_1 durchlaufen; dieses ist daher zu o projectivisch. Da nun durch eine bestimmte Anordnung der Involution diejenige des Büschels o unzweideutig bestimmt ist, so folgt der dem § 24 vorausgesetzte Lehrsatz zunächst für die Involution AB, AB_1 ; AΓ, $\Gamma\Gamma_1$. Es ist dies aber die allgemeinste Strahleninvolution mit imaginärem Centrum A. Da jede Strahleninvolution von einer Geraden in einer projectivischen Punktinvolution geschnitten, diese aber von jedem Punkt aus durch eine Strahleninvolution projicirt wird, so folgt der Lehrsatz auch für die übrigen möglichen Fälle.

Die in ihm gegebene Definition für das projectivische Aufreihen einer Involution ist deswegen berechtigt, weil die beiden Haupteigenschaften projectivischer Gebilde gültig bleiben, wenn die Involution in ihren Kreis aufgenommen werden. Zwei Gebilde sind unter sich projectivisch, wenn sie zu derselben Involution projectivisch sind. Sind ferner irgend drei Paare der Involution drei Individuen eines projectivischen Gebildes zugewiesen, so ist auch zu jedem anderen Paare das entsprechende Glied gegeben.

§§ 27 und 28. Die Repräsentationsebene einer Strahleninvolution zweiter Ordnung mit imaginärem Centrum A wird projectivisch bezogen auf diejenige eines Strahlbüschels mit imaginärem Centrum B.

§ 27. Einer stetigen Punktfolge der Ebene B entspricht eine stetige Folge von Punktepaaren der Ebene A.

Es seien $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ irgend zwei der betrachteten Paare. Die übrigen sind Doppelpunkte projectivischer Reihen

$$A_1 B_1 C \ldots \barwedge B_2 A_2 \mathfrak{C}' \ldots ,$$

wo sich $\mathfrak{C}'$ projectivisch mit dem Punkte $\mathfrak{C}$ der Ebene B verändert und für die Paare $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ die Lagen A_2 und B_2 annimmt; diese mögen den Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der B-Ebene zugehören. Zwei benachbarten Punkten $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2$ der letzteren entsprechen, weil

$$A_2 B_2 \mathfrak{C}_1' \mathfrak{C}_2' \ldots \barwedge \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \ldots$$

ist, in dem C zugehörigen Felde zwei einander genäherte Punkte $\mathfrak{C}_1' \mathfrak{C}_2'$ (§ 16). Setzt man nun

$$A_2 B_2 \mathfrak{C}_1' \ldots \barwedge A_2 B_2 \mathfrak{C}_2' \ldots \barwedge B_1 A_1 C \ldots ,$$

so gehören (§ 16) auch jedem anderen Punkte der letzteren Reihe zwei benachbarte Punkte der ersteren zu. Einem Doppelpunkte D der dritten und zweiten Reihe rückt der entsprechende der ersten $\mathfrak{D}_1'$ um so näher, je mehr $\mathfrak{C}_1'$ an $\mathfrak{C}_2'$ herangerückt wird. Da nun projectivische Reihen stetig auf einander bezogen sind, so können entsprechende Punkte der Reihen 1 und 3 sich nur dann unbegrenzt nähern, wenn sie in der Nachbarschaft eines Doppelpunktes dieser Reihen sich befinden. Sind also $C_1 C_2$ die Doppelpunkte der ersten und dritten, $D_1 D_2$ die der zweiten und dritten Reihe, so liegt D_1 einem der ersteren Punkte, sagen wir C_1, nahe; da alsdann (§ 22)

$$A_1 B_1 C_1 D_1 \barwedge A_2 B_2 C_2 D_2$$

ist, so mufs auch D_2 bei C_2 liegen.

Wenn die Curve in der B-Ebene sich selbst nicht schneidet und keinen der beiden Verzweigungspunkte enthält, denen die Doppelpunkte der Involution entsprechen, so gehören ihr zwei Zweige zu, die in bestimmter Weise die Paare $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ verbinden, welche den Anfangs- und Endlagen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des Punktes $\mathfrak{C}$ entsprechen. Einem geschlossenen, sich nicht schneidenden Zuge der B-Ebene entspricht eine Curve, die aus einem einzelnen oder zwei verschiedenen geschlossenen Zügen be-

steht. Wenn die geschlossene Curve der B-Ebene sehr klein ist, so setzt sich die entsprechende A-Curve aus zwei kleinen geschlossenen Zügen zusammen.

§ 28. Diejenigen Curven des involutorischen Feldes, welche Ketten der B-Ebene entsprechen, werden als Ketten des ersteren bezeichnet. Jede Kette kann auf unendlich viele Weisen durch projectivische Kettenbüschel der Ebene A erzeugt werden. Die festen Punkte $A_1 B_1$ des einen kann man auf der Curve beliebig wählen, diejenigen des anderen ergänzen jene zu Paaren der Involution (A_2 und B_2). In den reell-projectivischen Tangentenbüscheln entsprechen die imaginären Strahlen $A_1\mathrm{A}$; $B_1\mathrm{A}^1$; $A_2\mathrm{A}^1$; $B_2\mathrm{A}$ einander.

Jede Kette kann ferner auf unendlich viele Weisen durch projectivische Kettenschaaren erzeugt werden, die den Punkten $C_1 D_1$ resp. $C_2 D_2$ beigeordnet sind. Das Paar $C_1 C_2$ des Involutionsfeldes kann ganz beliebig aufserhalb der Kette ausgewählt werden, das andere $D_1 D_2$ ist dann durch jenes eindeutig bestimmt.

Einem Kettenbüschel $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ der B-Ebene entspricht ein projectivisches Kettenbüschel $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ der Involutionsebene, und zwar entsprechen in den sechs reell-projectivischen Tangentenbüscheln die Strahlen

$$\mathfrak{A}\mathrm{B}\,,\,\mathfrak{B}\mathrm{B}^1\ ;\ A_1\mathrm{A}\,,\,A_2\mathrm{A}\ ;\ B_1\mathrm{A}^1\,,\,B_2\mathrm{A}^1$$

einander. Die beiden Ebenen sind daher in den kleinsten Theilen zu einander projectivisch[15]. Entspricht dem Punkte $\mathfrak{A}$ ein Doppelpunkt D_1 des Involutionsfeldes, so ist derselbe für alle Involutionsketten des Büschels ein Doppelpunkt. Ihre Tangenten bilden ein reelles Paar der Involution mit den Doppelstrahlen $D_1\mathrm{A}$ und $D_1\mathrm{A}^1$. Sie ist zum Tangentenbüschel in $\mathfrak{A}$ so projectivisch, dafs diesen Doppelstrahlen $\mathfrak{A}\mathrm{B}$ und $\mathfrak{A}\mathrm{B}^1$ zugehören.

Der $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beigeordneten Kettenschaar entspricht eine Schaar von $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ beigeordneten Involutionsketten; jede von ihnen schneidet jeden Zweig einer beliebigen Halbkette in einem Punkte so, dafs die beiden Tangenten ein Paar der Involution des Grundpunktes A projiciren. Jede einzelne trennt daher je einen der Punkte $A_1 A_2$ von wenigstens einem der Punkte $B_1 B_2$.

In der projectivischen Beziehung

$$A_1 B_1 C \ldots \overline{\wedge}\ B_2 A_2 \mathfrak{C}' \ldots$$

durchläuft $\mathfrak{C}'$ die Halbkette $A_2 \mathfrak{C}_1' B_2$, wenn $\mathfrak{C}$ die Halbkette $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}$ durcheilt, deren Anfangs- und Endlagen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ zugehören. Für die Herstellung der Paare, welche Punkten des Bogens $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}$ entsprechen, hat man also die Halbketten $A_1 C B_1$ und $B_2 \mathfrak{C}_1' A_2$ und folglich überhaupt zwei feste Halbketten $A_1 B_1$ und $B_2 A_2$ einander zuzuweisen; in den vier Tangentenbüscheln entsprechen $A_1 \mathbf{A}$; $B_1 \mathbf{A}^1$; $B_2 \mathbf{A}$; $A_2 \mathbf{A}^1$ einander. Zwei entgegengesetzten Halbketten $A_1 B_1$ gehören zwei entgegengesetzte Halbketten $B_2 A_2$ zu. Die letzteren vertauschen sich, wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}$ durch die entgegengesetzte Halbkette vertreten wird. Einer ganzen Kette $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gehört daher das Erzeugnifs der Kettenbüschel zu, die den gefundenen Tangentenbüscheln sich anschliefsen. Mit der Kette $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ bewegt sich die $A_1 C B_1$ zuzuordnende Kette $B_2 \mathfrak{C}_1 A_2$ projectivisch. Hierin kann die erstere Kette $B_1 C A_1$ ganz willkürlich gewählt werden. Speciell liefert das B_1 $A_2 A_1$ zugehörige Kettenbüschel $A_2 B_2$ das Tangentenbüschel des untersuchten Büschels $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ bei A_2, und das $B_1 B_2 A_1$ zugehörige Büschel $A_2 B_2$ dasjenige bei B_2. Dieselben sind also (§ 18) zu den Tangentenbüscheln der Ketten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ so reell-projectivisch, dafs die imaginären Strahlen $\mathfrak{A}\mathbf{B}$; $\mathfrak{B}\mathbf{B}^1$; $A_2 \mathbf{A}$; $B_2 \mathbf{A}^1$ einander entsprechen; natürlich sind, da sich A_1, B_1 gegen A_2, B_2 vertauschen lassen, die Büschel bei A_1 und B_1 zu jenen projectivisch, und es entsprechen den vorigen imaginären Strahlen $A_1 \mathbf{A}$ und $B_1 \mathbf{A}^1$. Die Tangenten in A_1 und A_2 bewegen sich daher in einer, und die in B_1 und B_2 in der entgegengesetzten Richtung, wenn $\mathbf{A}$ im Unendlichen liegt. Von jeder Halbkette $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ werden die Halbtangenten nach Aufsuchung von irgend vier zusammengehörigen durch die Festsetzung fixirt, dafs die Halbstrahlen gestreckter Winkel bei A_1, A_2, B_1, B_2 einander zugehören. Tritt an die Stelle von $B_1 B_2$ der eine Doppelpunkt D_1, so ist

$$A_1 C D_1 \ldots \overline{\wedge}\ D_1 \mathfrak{C}^1 A_2 \ldots$$

In den Tangentenbüscheln der projectivischen Kettenbüschel $A_1 D_1$ und $D_1 A_2$ gehören die imaginären Strahlen $A_1 \mathbf{A}$; $D_1 \mathbf{A}^1$; $D_1 \mathbf{A}$; $A_2 \mathbf{A}^1$ einander zu. Im Punkte D_1 ergeben sich, weil die beiden Strahlbüschel D_1 entgegengesetzten Sinnes sind, zwei verschiedene sich selbst entsprechende

Strahlen. Sie bilden, da D_1A und D_1A^1, sowie D_1A^1 und D_1A einander zugehören, ein Paar der Involution mit den Doppelstrahlen D_1A und D_1A^1. Von den vier Halbstrahlen, die man bei D_1 so erhält, gehören je zwei ergänzende d_1 und d_1' derselben Halbkette an. Denn ist d_1 ein Doppel-Halbstrahl der einen, so ist auch d_1' ein solcher. Da ferner auch die Halbstrahlenbüschel entgegengesetzten Sinnes sind, so werden nun irgend zwei entsprechende von d_1 und d_1' getrennt. Für die ergänzende Halbkette sind d_1 und d_1' wechselseitig entsprechende Halbstrahlen. Beim Büschel $D_1 D_1, A_1 A_2$ bleibt hinsichtlich $A_1 A_2$ alles wie vorher, bei D_1 aber ergeben sich andere und andere Paare der Involution. In dem Tangentenbüschel in D_1, dessen Strahlen der festen Tangente der Kette $A_1 D_1 C$ nach und nach zugeordnet werden, entsprechen D_1A und D_1A^1 den Strahlen 𝔅B und 𝔅B^1. Die Involution D_1 ist daher (§§ 24—26) so reell-projectivisch zum Strahlbüschel 𝔅, dafs den Doppelstrahlen D_1A und D_1A^1 die Strahlen 𝔅B und 𝔅B^1 zugehören. Man bemerke noch, dafs die einzelnen Strahlen der Involution D_1 in gleichem Sinne mit der beweglichen Tangente in D_1 der Kette $D_1 A_2$, die einer festen Kette $A_1 D_1$ zugeordnet wird, sich bewegen, also in entgegengesetztem Sinne mit den Tangentenbüscheln in A_1, A_2 des Kettenbüschels $A_1 A_2, D_1 D_1$, wenn A im Unendendlichen liegt. Die genannten Strahlen sind zwei entgegengesetzt gerichteten Büscheln gemeinsam. Wird nun eine kleine Verschiebung des letzteren vorgenommen, so treten an Stelle eines Doppelstrahls zwei sehr nahe gelegene. Zwischen beiden liegt ein Doppelstrahl der beiden neuen Reihen, der sich also in demselben Sinne verschiebt, wie der irgend einem festen Strahle des ersten Büschels zugehörige bewegliche.

Von dem einer beliebigen Kette B beigeordneten Punktepaar 𝔈𝔇 kann man noch einen 𝔈 beliebig wählen, der andere 𝔇 ist dann eindeutig bestimmt. Bezieht man nämlich das Strahlbüschel B projectivisch so auf ein concentrisches, dafs B𝔈 und 𝔟 einander entsprechen, so gehört der gegebenen Kette eine andere zu, aus deren Pol 𝔇′ bezüglich 𝔟 der gesuchte Punkt 𝔇 entsteht. Die entsprechenden Paare seien $C_1 C_2$ und $D_1 D_2$. Die übrigen Paare der Involution entstehen als Coincidenzpunkte der Reihen

$$C_1 D_1 E \ldots \;\overline{\wedge}\; D_2 C_2 \mathfrak{E}' \ldots$$

Da der Punkt 𝔈′ die Lagen D_2 und C_2 einnehmen mufs, wenn die Paare $D_1 D_2$ und $C_1 C_2$ entstehen sollen, so mufs er eine C_2 und D_2 beigeordnete

Kette des Feldes A durchlaufen, wenn die Involutionskette entstehen soll, welche der $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ beigeordneten entspricht. Die erstere ist daher das Erzeugnifs zweier projectivischer, C_1D_1 und D_2C_2 resp. beigeordneter Kettenschaaren. Sie schneidet jeden Zweig einer jeden Halbkette C_1C_2, D_1D_2 einmal so, dafs die Tangenten beider ein Paar der Involution A ausschneiden. Die Halbkette gehört nämlich einer Halbkette $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ der Ebene B zu, welche die $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ beigeordnete Kette in einem Punkte $\mathfrak{F}$ trifft. Die Punkte des ihm entsprechenden Paares sind beiden Curven der Involutionsebene gemeinsam und vertheilen sich (§ 27) auf die beiden verschiedenen Zweige der Halbkette. Da die Tangenten in $\mathfrak{F}$ in der Punktebene B ein Paar der Involution B ausschneiden, so treffen die Tangenten in einem Punkte des entsprechenden Paares die unendlich ferne Gerade in einem Paare der Involution A. Die C_1C_2 und D_1D_2 beigeordnete Kette scheidet daher jeden der Punkte C_1 und C_2 von wenigstens einem der Punkte D_1 und D_2 ab.

§ 29. Werden zwei Paaren A_1A_2 und B_1B_2 einer Involution diejenigen $A_1'A_2'$ und $B_1'B_2'$ einer zweiten desselben Trägers (A) genügend genähert, so rückt an ein beliebiges Paar C_1C_2 der ersteren ein Paar der anderen beliebig nahe heran ($C_1'C_2'$). Setzt man je drei einander nahe gelegene Paare als homologe Glieder projectivischer Reihen, so nähern sich irgend zwei entsprechende Paare derselben (D_1D_2 und $D_1'D_2'$).

D_1 und D_2 sind Doppelpunkte der Reihen

$$A_1B_1C_1 \ldots \barwedge B_2A_2\mathfrak{D} \ldots, \qquad 1)$$

D_1' und D_2' diejenigen der Reihen

$$A_1'B_1'C_1' \ldots \barwedge B_2'A_2'\mathfrak{D}' \ldots \qquad 2)$$

Die drei gegebenen Paare der ersten Reihe entspringen aus den Lagen $A_2B_2C_1$ von $\mathfrak{D}$, die entsprechenden aus den Lagen $A_2'B_2'C_1'$ von $\mathfrak{D}'$. Daher ist

$$B_2A_2C_1\mathfrak{D} \ldots \barwedge B_2'A_2'C_1'\mathfrak{D}' \ldots \qquad 3)$$

und $\mathfrak{D}'$ rückt so nahe, als man nur immer will, an $\mathfrak{D}$ heran (§ 16, Zusatz 2), wenn man $B_2A_2C_1$ und $B_2'A_2'C_1'$ einander genügend nähert. Setzt man nun

$$A_1B_1C_1 \ldots \barwedge A_1'B_1'C_1' \ldots \qquad 4)$$

und folglich auch

$$B_2 A_2 \mathfrak{D} \ldots \,\overline{\wedge}\, B_2' A_2' \mathfrak{D}' \ldots, \qquad 5)$$

so liegen je zwei entsprechende Punkte von 4) und auch von 5) einander nahe, wenn man noch $A_1 B_1$ und $A_1' B_1'$ einander nähert. Einem Doppelpunkt der Reihen 2) liegen alsdann zwei entsprechende Punkte der festen Reihen 1) nahe. Daher mufs jedes Paar $D_1' D_2'$ der zweiten sich dem entsprechenden $D_1 D_2$ der ersten Involution nähern.

§ 29a. Hält man ein Paar $A_1 A_2$ einer Involution fest, von einem zweiten $B_1 B_2$ aber nur einen Punkt B_2, so nähert sich gleichzeitig mit B_1 auch von jedem anderen Paare $C_1' C_2'$, $D_1' D_2'$, $E_1' E_2'$ ein Punkt C_1', D_1', E_1' dem Punkte A_1, das Feld $A_2 B_2 C_2' D_2' E_2'$ aber einem zur Involution projectivischen Felde $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2 \ldots$

Der Satz ist, weil $A_1 A_2$, $A_1 B_2$, $A_1 C_2 \ldots$ eine zur ersteren projectivische Involution ist, nur ein Corollar des vorhergehenden.

§ 30. In den beiden involutorischen Feldern des § 29 liegt jeder Kette ihre entsprechende nahe, und in irgend zwei benachbarten Punkten derselben nähern sich die Tangenten ihrer ganzen Ausdehnung nach, wenn man es nicht mit einem Doppelpunkt der festen Involution zu thun hat.

Verbindet man die Punkte eines kleinen Bereiches mit den Paaren $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ durch Ketten des Feldes $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, so rücken alle Tangenten, welche in Punkten des Bereiches berühren, bei genügender Verkleinerung desselben beliebig nahe an einander, falls derselbe nicht einen Doppelpunkt des Feldes oder einen der Punkte A oder B einschliefst.

Die Kette $A_1 A_2$, $C_1 C_2$, $B_1 B_2$ entsteht aus den projectivischen Büscheln $A_1 C_1$ und $C_2 A_2$. In denselben entsprechen die nach B_1 führenden Ketten einander; die Tangente in C_1 kommt der Kette $A_1 C_1$ zu, welche $C_2 C_1 A_2$ zugehört. Ersetzt man nun die gewöhnlichen Buchstaben durch die gestrichenen, so treten an Stelle der früheren Ketten ihnen nahe gelegene $A_2' C_2' B_1'$, $A_2' C_2' C_1'$, $A_1' C_1' B_1'$. Die beiden ersteren mögen in A_2' die Tangenten t_3' und t_4' haben, die letztere in C_1' die Tangente t_2'. Die gesuchte t_1' entspricht t_4', wenn man die Strahlbüschel A_2' und C_1' so projectivisch bezieht, dafs die von t_3' und t_2' ausgehenden Darstellungen der Strahlen $A_2' \mathrm{A}$ und $C_1' \mathrm{A}$ einander zugehören. Da nun $t_2' t_3' t_4'$ bei den ent-

sprechenden Geraden $t_2 t_3 t_4$ liegen (§ 5), so befindet auch t_1' sich bei t_1. Da aber die Kette $A_2 C_2 C_1$ unbestimmt wird, wenn an die Stelle des Paares $C_1 C_2$ ein Doppelpunkt tritt, so darf in diesem Falle der Schlufs nicht mehr gemacht werden.

Der Zusatz ergiebt sich, wenn $A_1' A_2'$ mit $A_1 A_2$, $B_1' B_2'$ mit $B_1 B_2$ zusammenfällt, C_1' und C_1 aber beweglich bleiben.

Zweiter Abschnitt.

Lehrsätze über Involutionen nter Ordnung. §§ 31—39.

§ 31. Unsere Aufgabe ist es nun, auf dem bereits Gewonnenen fufsend, eine Theorie der allgemeinen Involutionen aufzubauen. Es wird aber zweckmäfsig sein, eine kurze Erläuterung des Gedankenganges an der Involution dritter Ordnung vorauszuschicken. Wir erhalten ihre Gruppen, wenn wir auf alle Arten die projectivische Beziehung

I) $$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1 \ldots \barwedge \mathrm{I}_\alpha)\; B_2, A_2, \mathfrak{C}_2' \ldots,$$

wo nur $\mathfrak{C}_2'$ beweglich ist, zwischen einer Involution zweiter Ordnung und einem einförmigen Gebilde desselben Trägers (A) herstellen und jedesmal die Coincidenzelemente eines solchen Reihenpaares zusammenfassen. Ein Element, das nicht mit einem der A_λ oder B_λ zusammenfällt, kommt in einer Gruppe vor. Wenn $\mathfrak{C}_2'$ mit A_2 zusammenfällt, so entsprechen dem letzteren zwei verschiedene und daher alle Paare der Involution I. Da dann auch AA_1 zwei und damit alle Elemente von I_α zugehören, so besteht eine Gruppe der Involution aus A, A_1, A_2 und eine andere aus B, B_1, B_2.

Der ersten Erzeugungsweise können sofort noch andere zugesellt werden. Die Involutionsgruppen

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}'\mathfrak{C}_1', \mathfrak{C}''\mathfrak{C}_1'' \ldots$$

entstehen als Coincidenzpaare der festen Reihe

II) $$AB\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 \ldots$$

und der projectivischen einförmigen Gebilde

$$\mathrm{II}_1)\; B_1 A_1 \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 \ldots \barwedge \mathrm{II}_2)\; B_1 A_1 \mathfrak{C}'\mathfrak{C}_1'\mathfrak{C}_2' \ldots \barwedge \mathrm{II}_3)\; B_1 A_1 \mathfrak{C}''\mathfrak{C}_1''\mathfrak{C}_2'' \ldots$$

Zu der Involution I sind die Reihen gleichstelliger Glieder

$II'_1)$ $A_1 B_1 \mathfrak{E}\mathfrak{E}'\mathfrak{E}'' \ldots$ $II'_2)$ $A_1 B_1 \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}'_1 \mathfrak{E}''_1 \ldots$ $II'_3)$ $A_1 B_1 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}'_2 \mathfrak{E}''_2 \ldots$

projectivisch, deren Elemente nämlich je den Gliedern $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \ldots$ von II nach und nach zugeordnet werden müssen, damit die gegebene Anordnung von I entsteht. In ihnen allen gehören A_1 und B_1 den Paaren AA_1 und BB_1 zu. Mit ihnen projectivisch ist daher auch die Reihe I_α, die irgend ein Glied der Involution dritter Ordnung mit der Involution I gemeinsam hat. Die gesuchten Elemente können noch in anderer Weise definirt werden. Die Reihen II; II_1, II_2, $II_3 \ldots II_\beta$ und I_α stehen nämlich in trilinearer Beziehung[17]. In jedem Tripel zusammengehöriger Elemente ist das dritte nach Festsetzung von irgend zweien eindeutig bestimmt; irgend zwei von ihnen können noch projectivische Reihen beschreiben, wenn das letzte Element des Tripels beliebig festgehalten wird. In der That, irgend einem Gliede $\mathfrak{F}_\gamma$ von I_α ordnet sich ein bestimmtes Glied der Involution zweiter Ordnung zu und damit das bestimmte Reihenpaar II und II_γ, welche eben dieses Glied erzeugen. Irgend einem Gliede $\mathfrak{D}_\delta$ von II aber gehört in II_γ das bestimmte Glied $\mathfrak{E}^\gamma_\delta$ zu. Wenn $\mathfrak{D}_\delta$ festgehalten wird, und $\mathfrak{F}_\gamma I_\alpha$ durchläuft, so mufs $\mathfrak{E}^\gamma_\delta$ die zu ihm und zur gegebenen Involution I projectivische Reihe II'_δ durchlaufen. Sehr leicht ist auch zu zeigen, dafs, wenn das Element $\mathfrak{E}^\gamma_\delta$ festgehalten wird, wobei es die verschiedenen Bezeichnungen $\mathfrak{E}^{\gamma_1}_{\delta_1}$, $\mathfrak{E}^{\gamma_2}_{\delta_2}$, $\mathfrak{E}^{\gamma_3}_{\delta_3} \ldots$ erfährt, die Paare $\mathfrak{D}_{\delta_1}\mathfrak{F}_{\gamma_1}$, $\mathfrak{D}_{\delta_2}\mathfrak{F}_{\gamma_2} \ldots$ $\mathfrak{D}_{\delta_3}\mathfrak{F}_{\gamma_3} \ldots$ projectivische Reihen durchlaufen. Man setze zu diesem Zwecke, wenn $\mathfrak{F}_\gamma$, $\mathfrak{D}_\delta$ und $\mathfrak{E}^\gamma_\delta$ zusammengehören und P, Q, R, S vier feste Punkte einer Ebene sind,

$$A_2 B_2 \mathfrak{F}_\gamma \ldots \;\overline{\wedge}\; P(QRS \ldots)$$
$$AB\mathfrak{D}_\delta \ldots \;\overline{\wedge}\; Q(RPS \ldots)$$

endlich für die Reihen $II_\alpha II_\gamma$ jedesmal

$$B_1 A_1 \mathfrak{E}^\gamma_\delta \ldots \;\overline{\wedge}\; R(QPS \ldots)$$

Das Strahlbüschel, welcher so aus II entsteht, erzeugt mit denen, die aus den Reihen $II_1 II_2 \ldots$ sich ergeben, Strahlen $p_1 p_2 p_3$, die durch den Punkt P gehen. Dies Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3$ ist zu den Reihen II' projectivisch; insbesondere erzeugen die Strahlbüschel, die aus II und II_δ entstehen, PS und es gehören PQ und PR den Elementen A_1 und B_1 der Reihen II' zu; $p_1 p_2 p_3 \ldots$ und $P(QRS \ldots)$ sind also identisch. Daher ent-

sprechen jedem Tripel $\mathfrak{E}_\delta^\gamma \mathfrak{D}_\delta \mathfrak{F}_\gamma$ drei Geraden, die einen bestimmten Punkt der Ebene mit P, Q, R verbinden. Aus der Symmetrie dieser Beziehung folgt, dafs irgend zwei Elemente des Tripels sich projectivisch bewegen, wenn das dritte festbleibt. Es gehört also jeder Zusammenstellung $\mathfrak{D}_\delta$ und $\mathfrak{E}_\delta^\gamma$ ein Element $\mathfrak{F}_\gamma$, jedem Paare $\mathfrak{E}_\delta^\gamma$ und $\mathfrak{F}_\gamma$ ein Element $\mathfrak{D}_\delta$ zu.

Eine Ausnahme hiervon machen allein die Paare AB_2 und A_2B der Reihen II und I_α, A_2B_1 und B_2A_1 der Reihen I_α und II_λ, und endlich die Zusammenstellungen AB_1 und A_1B der Reihen II und II_λ, denen je unendlich viele Elemente zugeordnet werden. So entspricht z. B. B_2 dem Gliede AA_1 der Involution I, und um diese Gruppe entstehen zu lassen, hat man A_1 jedem beliebigen Element von II zuzuordnen.

Alle Coincidenzelemente der Involution I mit der Reihe I_α, und keine anderen Elemente vereinigen in sich drei zusammengehörige Elemente $\mathfrak{E}_\delta^\gamma$, $\mathfrak{D}_\delta$ und $\mathfrak{F}^\gamma$. Wir können sie daher ermitteln, wenn wir jede Reihe II'_δ mit der einen Reihe I_α zur Coincidenz bringen, woraus Glieder der Involution III_α A_1A_2, B_1B_2 entstehen, und feststellen, wie oft ein Paar das Element $\mathfrak{D}_\delta$ enthält, dem es zugehört. Die Involution erscheint aber in einer Anordnung, welche zu den Reihen homologer Glieder II_γ der Reihen II'_γ und darum auch zu der einen Reihe II projectivisch ist. Den Paaren A_1A_2 und B_1B_2 gehören in allen charakterisirenden Reihen II_γ die Elemente A_1 und B_1 und darum in II die Elemente B und A zu. Die Elemente also, welche den Reihen gleichzeitig angehören

$$\text{I)} \qquad A_1A, B_1B, \mathfrak{E}_1\mathfrak{E} \ldots \barwedge \mathrm{I}_\alpha) \; B_2, A_2, \mathfrak{E}'_2 \ldots,$$

sind auch den beiden Reihen

$$\text{II)} \qquad A, B, \mathfrak{D} \ldots \barwedge \mathrm{III}_\alpha) \; B_1B_2, A_1A_2, \mathfrak{D}'_1\mathfrak{D}'_2 \ldots$$

gemeinsam. $\mathfrak{D}'_1\mathfrak{D}'_2$ verändert sich projectivisch zu $\mathfrak{E}'_2$, weil es der festen Reihe II'_1 mit I_α gemeinsam ist. Die unter einander projectivischen Reihen III'_1, III'_2, $\mathrm{III}'_3 \ldots$, welche aus homologen Gliedern der Reihen III_α entstehen, sind also auch mit den Reihen I'_α projectivisch. Da alle Reihen III_α Anordnungen derselben Involution sind, so kann man ganz dasselbe erreichen, wenn man auf irgend eine von ihnen III alle projectivischen Anordnungen IV_1 IV_2 $\mathrm{IV}_3 \ldots \mathrm{IV}_\alpha$ von II bezieht, bei welchen B und A den Gliedern A_1A_2 und B_1B_2 von III zugeordnet werden. Die Reihen

homologer Glieder IV'_α werden sich projectivisch zu den I'_α ergeben, wenn III und IV_α dieselbe Gruppe erzeugen, wie II und III_α und wie I und I_α.

Die übrigen Elemente der Gruppe, zu denen C_2 gehört, sind den beiden Reihen

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2 \ldots \barwedge B_2, A_2, C_2 \ldots$$

gemeinsam. Für diese Gruppe allein kann man $\mathfrak{C}C_2$ und C_2 diejenige Rolle spielen lassen, die vorher BB_1 und A_2 inne hatten. Die gesuchten Elemente müssen daher zwei projectivischen Reihen

$$C_2B_2, C_2A_1 \ldots \barwedge A, \mathfrak{C} \ldots$$

gemeinsam sein. Die Involution zerfällt aber in C_2 und in eine zu ihr und $A, \mathfrak{C} \ldots$ projectivische Reihe $B_2, A_1 \ldots$ Aufser C_2 enthält mithin die untersuchte Gruppe noch ein bestimmtes Paar der Involution zweiter Ordnung $AA_1, \mathfrak{C}B_2$, das natürlich auch der Involution $\mathfrak{C}A_2, BB_1$ angehört. Mit Ausnahme einzelner besitzt daher jede vorhandene Involutionsgruppe drei verschiedene Elemente C, C_1, C_2; D, D_1, D_2; ...

Irgend zwei beliebige dieser Gruppen können dazu dienen, alle anderen zu erzeugen. Um nämlich die Paare DD_1 und $D'D'_1$ zu erhalten, die D_2 zu je einer Gruppe von AA_1A_2, BB_1B_2 und AA_1A_2, CC_1C_2 ergänzen, hat man zuerst die Glieder $D_2\mathfrak{D}$ und $D_2\mathfrak{D}'$ der Involutionen AA_1, $BB_1, \mathfrak{C}C_2$ und $AA_1, B_2\mathfrak{C}, CC_1$ aufzusuchen. Alsdann gehört DD_1 zur Involution $AA_1, B_2\mathfrak{D}$ und D'_1D' zur Involution $AA_1, C_2\mathfrak{D}'$. Beiden Involutionen ist aufser AA_1 nach dem Vorigen noch das Paar gemeinsam, welches D_2 zu einem Gliede der Involution $AA_1M, B_2\mathfrak{C}C_2$ ergänzt. Da DD_1 und $D'D'_1$ mit AA_1, aber ebenso auch mit A_1A_2 und A_2A zu je einer Involution gehören, so fallen sie zusammen.

Diesen Schlufs mehrmals anwendend erkennt man, dafs aus irgend zwei Gruppen CC_1C_2 und DD_1D_2 die Reihenpaare

$$CC_1, DD_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1 \ldots \barwedge D_2, C_2, \mathfrak{C}'_2 \ldots,$$

wo nur $\mathfrak{C}'_2$ variabel ist, sich herstellen lassen, deren Coincidenzgruppen sämmtlich Glieder der untersuchten Involution sind, und dafs die letzteren alle in dieser Art darstellbar sind. Irgend eine Reihe von Gruppen derselben bedingt eine ganz bestimmte Anordnung $\mathfrak{C}'_2\,\mathfrak{C}''_2\,\mathfrak{C}'''_2 \ldots$ von Elementen, die, damit sie entstehen, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ zugeordnet werden müssen. Die verschiedenen einförmigen Gebilde, welche auf diese Weise eindeutig auf die Anordnung

der Involution dritter Ordnung bezogen sind, entsprechen auch einander eindeutig. Es ist ungemein wichtig, zu zeigen, dafs alle diese Reihen unter sich projectivisch sind. Weil aber die bezüglichen Schlüsse sich später wörtlich wiederholen, so wollen wir diese Überlegung hier nicht durchführen. Offenbar kann man dann die Involution dritter Ordnung zu ihren charakterisirenden Feldern projectivisch setzen.

Der Hauptsatz der Involutionstheorie wird aber der sein, dafs nicht nur jeder Gruppe ein Element in jedem charakterisirenden Felde entspricht, sondern auch umgekehrt jedem Elemente des letzteren eine Gruppe zugehört. Dabei braucht man diesen Nachweis nur für irgend ein einförmiges Gebilde zu leisten. Wählt man ein Strahlbüschel mit imaginärem Centrum als Beispiel, so kommt es auf den Nachweis an, dafs ein Involutionsfeld der §§ 27—30 mit einem projectivischen Punktfelde im Allgemeinen drei, stets aber überhaupt gemeinsame Punkte hat. Hierbei würden sich die singulären Punkte, welche in ihren Gruppen mehrfach zählen, als sehr störend erweisen, wenn nicht gezeigt werden könnte, dafs es ihrer nur eine endliche Anzahl (höchstens vier) geben kann. Für das Involutionsfeld dritter Ordnung gelten ähnliche Stetigkeitsbetrachtungen, wie für dasjenige zweiter Ordnung.

Von diesen Sätzen sind die nachstehend für Involutionen $n$ter Ordnung aufgestellten Theoreme Verallgemeinerungen. Wir werden dieselben durch Schlüsse von n auf $n+1$ darthun.

§ 32. Auf eine feste Gliederung einer Involution $n-m$ter Ordnung werde eine Involution $m$ter Ordnung desselben Trägers projectivisch so bezogen, dafs zwei bestimmten Gruppen

$$A_1 A_2 \dots A_{n-m} \quad , \quad B_1 B_2 \dots B_{n-m}$$

der ersteren stets die Gruppen

$$B_{n-m+1} B_{n-m+2} \dots B_n \quad , \quad A_{n-m+1} A_{n-m+2} \dots A_n$$

entsprechen, einer dritten Gruppe $\mathfrak{C}'_1 \mathfrak{C}'_2 \dots \mathfrak{C}'_{n-m}$ aber eine veränderliche Gruppe $\mathfrak{C}_{n-m+1} \dots \mathfrak{C}_n$ der zweiten zugehört. Wenn man von speciellen Lagen der letzteren absieht, haben beide Reihen genau n Coincidenzelemente $C_1, C_2, C_3, \dots C_n$, welche eine Gruppe der Involution

$$A_1 A_2 \dots A_n \quad , \quad B_1 B_2 \dots B_n$$

bilden. Sie ist eindeutig bestimmt durch die Gruppe $\mathfrak{C}_{n-m+1} \dots \mathfrak{C}_n$, welche der Gruppe $\mathfrak{C}'_1 \mathfrak{C}'_2 \dots \mathfrak{C}'_{n-m}$ zugeordnet werden mufs, damit sie entstehe[16].

§ 33. Um eine solche Erzeugungsweise der Involution zu erhalten, kann man erstens zwei Gruppen derselben $A_1 A_2 \dots A_n$ und $B_1 B_2 \dots B_n$ willkürlich auswählen, und alsdann, nachdem m ($< n$) beliebig festgesetzt ist, in irgend einer Weise die Gruppen in je zwei andere

$$\begin{matrix} A_1 A_2 \dots A_{n-m} & \quad A_{n-m+1} \dots A_n \\ B_1 B_2 \dots B_{n-m} & \quad B_{n-m+1} \dots B_n \end{matrix}$$

zerlegen. Wenn dann jeder der beiden Gruppen von $n-m$ Elementen die kreuzweis stehende zugeordnet wird, einer dritten Gruppe der ersteren Involution aber nach und nach jede Gruppe der letzteren, so ergeben sich stets die Gruppen der Involution $n$ter Ordnung.

Ist eine feste Gruppe $\mathfrak{C}'_1 \mathfrak{C}'_2 \dots \mathfrak{C}'_{n-m}$ ausgewählt, so entspricht einer bestimmten Anordnung der Involution $n$ter Ordnung eine bestimmte Aufreihung der Involution $m$ter Ordnung.

$$A_{n-m+1} \dots A_n \ , \ B_{n-m+1} \dots B_n \ ,$$

jeder Gruppe der ersteren diejenige der letzteren, welche $\mathfrak{C}'_1 \mathfrak{C}'_2 \dots \mathfrak{C}'_{n-m}$ zugeordnet werden mufs, damit sie entstehe. Den Gruppen $A_1 A_2 \dots A_n$ und $B_1 \dots B_n$ entsprechen $A_{n-m+1} \dots A_n$ und $B_{n-m+1} \dots B_n$. Alle diese für die Anordnung der Involution charakteristischen Reihen sind mit einander projectivisch. Zu ihnen wird die Involution projectivisch gesetzt.

Zusatz 1. Die Involution ist durch irgend zwei ihrer Gruppen bestimmt.

Zusatz 2. Irgend ein Element des Trägers gehört entweder nur einer Gruppe an oder allen. Im letzteren Falle zerfällt die Involution in eine solche $n-1$ter Ordnung und dies gesonderte Element.

Zusatz 3. Sind $U_1, U_2, U_3, U_4 \dots$ und $V_1, V_2, V_3, V_4 \dots$ Involutionen $n-m$ter und $m$ter Ordnung resp., und ist eine Gruppe G von n Punkten ein Glied aller Involutionen $U_1 V_2$, $V_1 U_2$; $U_1 V_3$, $V_1 U_3$; $U_1 V_4$, $V_1 U_4$; ..., so ist $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots \barwedge V_1, V_2, V_3, V_4, \dots$

§ 34a. Wenn von einer Gruppe der Involution nur ein Element C_1 gegeben ist, und $C_1 \mathfrak{C}_3 \mathfrak{C}_4 \dots \mathfrak{C}_n$ ein Glied der Involution $A_2 A_3 \dots A_n$,

$B_2 B_3 \ldots B_n$ ist, so bilden $C_2, C_3, \ldots C_n$ eine Gruppe der beiden Involutionen:

1) $A_2 A_3 \ldots A_n, B_1 \mathfrak{C}_3 \ldots \mathfrak{C}_n$ und 2) $B_2 B_3 \ldots B_n, A_1 \mathfrak{C}_3 \ldots \mathfrak{C}_n$.
Sie sind die Doppelelemente der Reihen

$$A_3 A_4 \ldots A_n, \mathfrak{C}_3 \mathfrak{C}_4 \ldots \mathfrak{C}_n, \ldots \overline{\wedge}\ B_1, A_2, \ldots,$$

wenn auf das durch B_2 bestimmte Glied der Involution das Element C_1' bezogen wird, das mit C_1 ein Paar der Involution $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ bildet. Hat die den Involutionen 1) und 2) gemeinsame Gruppe bei C_1 ein $p-1$ faches Element, so ist C_1 ein p faches Element in der untersuchten Gruppe der Involution $n$ter Ordnung. Solche Gruppen werden als singuläre Gruppen, die mehrfachen Elemente als singuläre Elemente der Involution bezeichnet. Es kann in einer Involution $n$ter Ordnung höchstens $2(n-1)$ Elemente solcher Art geben.

§ 34b. Bei einer Involution mit einem $n$fachen Element D_1 als Gruppe giebt es im Allgemeinen $n-1$ gewöhnliche Doppelelemente. Findet man l verschiedene $p_1, p_2, \ldots p_l$ fach zählende singuläre Elemente, so ist

$$p_1 + p_2 + \ldots p_l = n - 1 + l.$$

Bei einer allgemeinen Involution können neben einem p_1 fachen Elemente noch $2n-1-p_1$, neben einem p_1 fachen und einem p_2 fachen noch $2n-p_1-p_2$ andere singuläre Elemente auftreten.

§ 35. Eine Strahleninvolution wird von jeder Geraden in einer projectivischen Punktinvolution $n$ter Ordnung geschnitten, diese aber von jedem Punkt aus durch eine projectivische Strahleninvolution projicirt. Daher kann alles Übrige zurückgeführt werden auf die Betrachtung von Strahleninvolutionen mit einem beliebigen imaginären Mittelpunkt A. Wir nehmen ihn in der Unendlichkeit an. Alsdann wird eine Strahlengruppe durch den unendlich fernen Strahl und $n-1$ reelle Punkte der Endlichkeit repräsentirt, jede andere Gruppe aber durch n im Endlichen liegende Punkte. Die Betrachtung der Involutionen kann also ersetzt werden durch die Betrachtung reeller in einer Ebene ausgebreiteter Gruppen zu n Punkten, bei welchen aber der involutorische Charakter erhalten bleibt, daſs jeder Punkt nur in einer Gruppe auftritt. Eine solche Gesammtheit wollen

wir ein involutorisches Punktfeld $n$ter Ordnung nennen und zwei solche Felder projectivisch, wenn sie geeignet sind, zu einander projectivische Involutionen mit den Grundpunkten als Centren darzustellen. Sie sind alsdann stetig auf einander bezogen.

Anm. Diesem Falle war die Bezeichnung in den §§ 32—34 angepafst; $A_\lambda B_\mu \mathfrak{C}_\nu$ bezeichnen in der Ebene veränderliche Punkte.

§ 36a. Ein involutorisches Feld $n$ter Ordnung ist durch zwei Gruppen

$$A_1 A_2 \ldots A_n \qquad B_1 B_2 \ldots B_n$$

vollständig bestimmt. C_1 gehört mit $n-1$ anderen Punkten $C_2 C_3 \ldots C_n$ zu einer Gruppe. Wird C_1 genügend nahe bei A_1 genommen, so rücken von den übrigen einzelne an einfache, und je p verschiedene an $p$fache Punkte der Gruppe $A_2 A_3 \ldots A_n$ so nahe heran, wie man nur immer will.

b. Liegen von einer Gruppe $B'_1 B'_2 \ldots B'_n$ m Punkte bei A_1, A_2, $\ldots A_m$, die Übrigen $B'_{m+1}, B'_{m+2}, \ldots B'_n$ aber $m-n$ Stellen $B_{m+1}, B_{m+2}, \ldots B_n$ des Involutionsfeldes nahe, welche von $A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots A_n$ endlich entfernt sind, so nähern sich von jeder anderen Gruppe der Involution $A_1 A_2 \ldots A_n$, $B'_1 B'_2 \ldots B'_n$ m Punkte den Stellen $A_1 A_2 \ldots A_m$ und $n-m$ andere einer bestimmten Gruppe der Involution $A_{m+1} \ldots A_n$; B_{m+1}, $B_{m+2} \ldots B_n$.

§ 37. Das involutorische Feld sei auf ein Punktfeld mit dem Centrum B projectivisch so bezogen, dafs den Gruppen $A_1 A_2 \ldots A_n$ und $B_1 B_2 \ldots B_n$ die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ resp. entsprechen. Die den Halbketten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ entsprechenden involutorischen Halbketten $A_1 A_2 \ldots A_n$, $B_1 B_2 \ldots B_n$ bestehen mit Ausnahme einzelner aus je n ganz im Endlichen liegenden Zweigen, welche in bestimmter Weise die Punkte $A_1, A_2, \ldots A_n$ mit den Punkten $B_1, B_2, \ldots B_n$ verbinden. Nur in einem $p$fachen Punkt der Involution fliefsen p von ihnen in einen $2p$strahligen Stern zusammen. Die p Strahlen, welche vom Mittelpunkt desselben aus nach Punkten der ersteren Gruppe führen, werden von denjenigen getrennt, welche nach Punkten der zweiten Gruppe führen. Die $2p$ Halbtangenten in dem $p$fachen Punkt ergänzen einander zu je zweien und bilden eine reelle Gruppe einer Hauptstrahlen-Involution $p$ter Ordnung, die nämlich zwei

$p$fache nach dem Grundpunkt und seinem conjungirten führende $p$fache Strahlen besitzt. Keine zwei Halbketten des Büschels haben aufser $A_1, A_2, \ldots A_n$ und $B_1, B_2, \ldots B_n$ gemeinsame Punkte. Eine von ihnen enthält die ganze unendlich ferne Gerade; alle übrigen liegen ganz im Endlichen. Mit der Halbkette $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ verändert auch die entsprechende $A_1 A_2 \ldots A_n$, $B_1 B_2 \ldots B_n$ sich stetig in ihrem Büschel. Die Tangenten in $A_1, A_2, \ldots A_n$ drehen sich dabei alle in einer, die in $B_1, B_2, \ldots B_n$ alle in der entgegengesetzten Richtung. In den reell-projectivischen Büscheln entsprechen die imaginären Strahlen

$$A_1\mathrm{A}\,,\ A_2\mathrm{A}\,,\ \ldots\ A_n\mathrm{A}\,,\ B_1\mathrm{A}^1\,,\ B_2\mathrm{A}^1\,,\ \ldots\ B_n\mathrm{A}^1\,,\ \mathfrak{A}\mathrm{B}\,,\ \mathfrak{B}\mathrm{B}^1$$

einander. Beide Felder sind daher in den kleinsten Theilen wie die Felder zweier projectivischer Strahlbüschel bezogen.

Enthält die Gruppe $A_1 A_2 \ldots A_n$ einen $p$fachen Punkt D, so ist die Hauptinvolution, welche die Tangenten in diesem Punkte bilden, reell-projectivisch auf das Tangentenbüschel in $\mathfrak{A}$ so bezogen, dafs den $p$fachen imaginären Strahlen $D\mathrm{A}$, $D\mathrm{A}^1$ die Strahlen $\mathfrak{A}\mathrm{B}$, $\mathfrak{A}\mathrm{B}^1$ zugehören. Die Tangenten in D bewegen sich in gleicher Richtung mit denen in $A_{p+1}, A_{p+2}, \ldots A_n$, in entgegengesetzter Richtung zu denen in $B_1, B_2, \ldots B_n$. Liegt D im Unendlichen, so geht jede Halbkette mit pZweigen in's Unendliche. Ihre pHalbasymptoten führen alle nach einem bestimmten Punkte E der Ebene und gehören einer Gruppe der Hauptinvolution $p$ter Ordnung um E an. Dieselbe ist auf das Büschel in $\mathfrak{A}$ so bezogen, dafs den $p$fachen Strahlen $E\mathrm{A}$ und $E\mathrm{A}^1$ die Strahlen $\mathfrak{A}\mathrm{B}^1$ und $\mathfrak{A}\mathrm{B}$ zugehören. Die Asymptoten bewegen sich daher in entgegengesetzter Richtung zu den Tangenten in $A_{p+1}, \ldots A_n$ und in gleicher mit denen in $B_1, B_2, \ldots B_n$.

§ 38. Nur eine der Ketten $A_1 A_2 \ldots A_n \circ B_1 B_2 \ldots B_n$, welche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beigeordneten Ketten $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$ entsprechen, enthält die unendlich ferne Gerade. Jede andere besteht aus höchstens $n$verschiedenen, ganz im Endlichen gelegenen, geschlossenen Zügen, von denen nur in einem $p$fachen Punkte p zusammenfliefsen können. Mit der Kette $A \circ \mathfrak{B}$ ändert sich auch die entsprechende $A_1 A_2 \ldots A_n \circ B_1 B_2 \ldots B_n$ stetig. Wenn jene sich um einen der Punkte $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ zusammenzieht, schliefst diese sich mit n getrennten kleinen Zügen um die Punkte $A_1, A_2, \ldots A_n$ resp. B_1, B_2,

$\ldots B_n$. Durch Angabe eines Punktes ist ein Individuum der $A_1 A_2 \ldots A_n$ und $B_1 B_2 \ldots B_n$ beigeordneten Schaar bestimmt.

Mit jeder Halbkette $A_1 A_2 \ldots A_n$, $B_1 B_2 \ldots B_n$ hat jede Kette $A_1 A_2 \ldots A_n \circ B_1 B_2 \ldots B_n$ die Punkte einer Gruppe gemeinsam; sie entspricht dem einzigen Schnittpunkte der Curven $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$, denen jene zugehören. Von einer nicht singulären Gruppe liegt auf jedem Zweige der Halbkette genau ein Punkt; in jedem schneiden die beiden Tangenten der Curven ein Paar des imaginären Grundpunktes A aus. Jede Curve $A_1 A_2 \ldots A_n \circ B_1 B_2 \ldots B_n$ trennt daher jeden Punkt der ersteren Gruppe von wenigstens einem der letzteren.

§ 39. Liegen zwei gegebenen Gruppen

$$A_1 A_2 \ldots A_n \qquad \text{und} \qquad B_1 B_2 \ldots B_n$$

zwei andere

$$A'_1 A'_2 \ldots A'_n \qquad \text{und} \qquad B'_1 B'_2 \ldots B'_n$$

in der Art genügend nahe, dafs bei einem $p$fachen Punkte p getrennte oder zum Theil zusammenfallende (des zweiten Involutionsfeldes) sich finden, so kann man irgend einer Gruppe $C_1 C_2 \ldots C_n$ der ersten Involution eine solche $C'_1 C'_2 \ldots C'_n$ der zweiten beliebig nähern, und wenn man die bisherigen Paare entsprechend setzt, auch jeder vierten Gruppe ihre zugehörige.

Zusatz 1. Bei der Darstellung zweier solcher Involutionen mit demselben imaginären Centrum liegen nicht nur entsprechende Ketten, sondern auch in benachbarten Punkten derselben ihre Tangenten einander nahe, wenn man von den singulären Punkten des festen Feldes absieht.

Zusatz 2. Zwei Ketten eines involutorischen Feldes, die zwei nicht singuläre benachbarte Punkte desselben mit zwei Gruppen $A_1 A_2 \ldots A_n$ und $B_1 B_2 \ldots B_n$, verbinden, haben in jenen einander nahe liegende Tangenten.

Anm. Im folgenden Abschnitte werden wir von vorne herein den Fall der Strahleninvolutionen mit imaginären Centren betrachten.

Dritter Abschnitt.

Erweisung der vorstehenden Sätze durch Schlüsse von n auf $n+1$.
§§ 40—70.

§ 40. Die Sätze des Abschnittes II sind im Abschnitt I für Involutionen zweiter Ordnung ($n = 2$) vollständig bewiesen. § 32 ergiebt unter solchen Umständen eine Definition der Involution dritter Ordnung; die §§ 33—39 stellen Lehrsätze über sie auf. Sind dieselben erprobt, so kann man unmittelbar zu den Involutionen vierter Ordnung übergehen. Wir wollen zeigen, daſs Definitionen und Lehrsätze für Involutionen $n+1$ ter Ordnung vereinbar sind, wenn dies für alle Involutionen bis zur $n$ten Ordnung hinauf der Fall ist. Die Glieder einer neuen Reihe mögen also aus den Coincidenzpunkten der projectivischen Involutionen desselben Trägers A

$$\text{I)}\quad A_1 \ldots A_{n-m+1}\,,\ B_1 \ldots B_{n-m+1}\,,\ \mathfrak{C}_1'\mathfrak{C}_2' \ldots \mathfrak{C}_{n-m+1}', \ldots \barwedge$$
$$\text{II)}\quad B_{n-m+2} \ldots B_{n+1}\,,\ A_{n-m+2} \ldots A_{n+1}\,,\ \mathfrak{C}_{n-m+2} \ldots \mathfrak{C}_{n+1}, \ldots$$

bestehen. Ein einzelnes Glied wird durch die Gruppe $\mathfrak{C}_{n-m+2} \ldots \mathfrak{C}_{n+1}$ festgelegt, welche der festen Gruppe $\mathfrak{C}_1' \ldots \mathfrak{C}_{n-m+1}'$ der ersten Involution zugeordnet werden muſs, damit es entstehe. Ein Punkt, der nicht beiden Gruppen $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ und $B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$ gemeinsam ist, gehört nur einer Gruppe der Involution $n+1$ ter Ordnung an. Denn er bestimmt, wenn er mit keinem der A_λ oder B_μ zusammenfällt, je eine neue Gruppe der beiden erzeugenden Involutionen. Da dieselben einander entsprechen müssen, so ist auch die projectivische Beziehung der beiden Reihen gegeben, und damit auch die Gruppe $\mathfrak{C}_{n-m+2} \ldots \mathfrak{C}_{n+1}$. Fällt der Punkt aber etwa mit A_1 zusammen, welche Stelle der Gruppe B nicht angehört, so bestimmt er nur das eine Glied $A_1 A_2 \ldots A_{n-m+1}$ der ersten und ein von $B_{n-m+2} \ldots B_{n+1}$ verschiedenes Glied der zweiten Involution. Die beiden letzteren und folglich (§ 16, Zusatz 1) alle Glieder der zweiten Involution werden somit $A_1 A_2 \ldots A_{n-m+1}$ zugewiesen. Ebenfalls nach § 16 werden aber ebenso dem einen Gliede $A_{n-m+2} \ldots A_{n+1}$ der zweiten Reihe alle Glieder, unter ihnen auch $\mathfrak{C}_1'\mathfrak{C}_2' \ldots \mathfrak{C}_{n-m+1}'$, der ersten Involution zu-

geordnet. Daraus folgt, dafs $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ ein Glied der Involution ist und durch $A_{n-m+2} \dots A_{n+1}$ charakterisirt wird. Aus denselben Gründen ist $B_1 B_2 \dots B_{n+1}$ eine durch $B_{n-m+2} \dots B_{n+1}$ charakterisirte Gruppe der Involution.

§ 41. Die Involution $n+1$ter Ordnung ergiebt sich auch aus den projectivischen Reihen:

$$\begin{array}{ll} \text{III)} & A_1 A_2 \dots A_{n-m}\ ,\ B_1 B_2 \dots B_{n-m}\ ,\ \mathfrak{D}_1' \mathfrak{D}_2' \dots \mathfrak{D}_{n-m}' \dots \barwedge \\ \text{IV)} & B_{n-m+1} \dots B_{n+1}\ ,\ A_{n-m+1} \dots A_{n+1}\ ,\ \mathfrak{D}_{n-m+1} \dots \mathfrak{D}_{n+1}\ , \end{array}$$

und zwar wird in beiden Fällen dasselbe Glied der Involution erhalten, wenn

$$\begin{array}{l} B_{n-m+2} \dots B_{n+1}\ ,\ A_{n-m+2} \dots A_{n+1}\ ,\ \mathfrak{C}_{n-m+2}' \dots \mathfrak{C}_{n+1}'\ ,\ \mathfrak{C}_{n-m+2} \dots \mathfrak{C}_{n+1}, \dots \barwedge \\ B_{n-m+1} \dots B_{n+1}\ ,\ A_{n-m+1} \dots A_{n+1}\ ,\ \mathfrak{D}_{n-m+1}' \dots \mathfrak{D}_{n+1}'\ ,\ \mathfrak{D}_{n-m+1} \dots \mathfrak{D}_{n+1}, \dots \end{array}$$

gesetzt wird, die Gruppen mit gestrichenen Buchstaben aber so bestimmt werden, dafs irgend ein Element $\mathfrak{A}$ ein Coincidenzelement zweier Reihenpaare I, II und III, IV ist.

Auf eine Anordnung I der Involution $n-m+1$ter Ordnung des § 40 haben wir, um alle Glieder der Involution $n+1$ter Ordnung zu erhalten, alle zu ihr projectivischen Anordnungen II_1, II_2, $\text{II}_3 \dots \text{II}_\alpha$ der Involution II zu beziehen, welche die Gruppen $B_{n-m+2} \dots B_{n+1}$ und $A_{n-m+2} \dots A_{n+1}$ entsprechend gemein haben. Die Gruppen, welche in den verschiedenen Reihen II_α je derselben Gruppe der Involution I angehören, bilden unter sich projectivische Reihen II_1', II_2', $\text{II}_3' \dots$, welche die Gruppen $A_{n-m+2} \dots A_{n+1}$ und $B_{n-m+2} \dots B_{n+1}$ entsprechend gemein haben, und von denen die homologen Punkte den Reihen II_γ angehören. Bezieht man nämlich die Involution projectivisch auf die Punkte einer Geraden, so entstehen aus den Anordnungen II_1, II_2, $\text{II}_3 \dots$ der Involution projectivische Punktreihen, welche zwei Punkte M und N entsprechend gemein haben. Die homologen Punkte derselben liegen nach § 19 projectivisch geordnet; ihnen entsprechen rückwärts die Reihen II_δ'. Durch irgend ein Glied der Reihe II_δ' ist eine Gruppe der Involution V $n+1$ter Ordnung eindeutig bestimmt. Denn bei der projectivischen Zuordnung zwischen I und II mufs es dem bestimmten Gliede g von I zugesellt werden, aus dem II_δ'

entsprang. Daher werden II'_1, II'_2, $II'_3, \ldots$ als charakteristische Reihen der Involution V bezeichnet.

Wegen $n+1>2$ ist bei passender Bezeichnung $n-m$ wenigstens gleich 1. Die Gruppen der Involution I) oder $A_1 A_2 \ldots A_{n-m+1}$, $B_1 B_2 \ldots B_{n-m+1}$ $n-m+1$ ter Ordnung sind nach § 32 der festen Anordnung III der Involution $n-m$ ter Ordnung

$$A_1 A_2 \ldots A_{n-m}\ ,\ B_1 B_2 \ldots B_{n-m} \ldots$$

mit sämmtlichen projectivischen Reihen

$$B_{n-m+1}\ ,\ A_{n-m+1} \ldots ,$$

$I_1, I_2, I_3 \ldots$ gemeinsam. Dabei sind A_{n-m+1}, B_{n-m+1} ganz beliebige Punkte ihrer Gruppen (§ 33). Die homologen Punkte aller Reihen I_δ ergeben die charakteristischen Reihen

$$I'_1,\ I'_2,\ I'_3, \ldots ,$$

welche alle die Punkte A_{n-m+1} und B_{n-m+1} entsprechend gemein haben, und deren homologe Punkte wieder in den Reihen I_δ vereinigt liegen. Sie sind zu der gegebenen Anordnung I der Involution $A_1 A_2 \ldots A_{n-m+1}$, $B_1 B_2 \ldots B_{n-m+1}$ und also auch zu den Reihen

$$II_1,\ II_2,\ II_3, \ldots II_\delta$$

projectivisch. Den Gruppen $A_{n-m+2} \ldots A_{n+1}$ und $B_{n-m+2} \ldots B_{n+1}$ der letzteren gehören in allen Feldern I'_λ die gemeinsamen Punkte B_{n-m+1} und A_{n-m+1} derselben zu. Denn die jenen entsprechenden Gruppen $B_1 \ldots B_{n-m+1}$ und $A_1 \ldots A_{n-m+1}$ werden in allen Feldern I'_ϵ durch diese charakterisirt (§ 40).

Um eine bestimmte Gruppe der Involution V $(n+1)$ter Ordnung zu erhalten, mufs man die ihm entsprechende Reihe II_δ auswählen. Zwei beliebige Gruppen g_α und h_β der Involutionen III und II_δ bestimmen einen zugehörigen Punkt, der nämlich in der Reihe I_β der Gruppe g_α entspricht, oder, was offenbar auf dasselbe hinauskommt, in der Reihe I'_α der Gruppe h_β[17]. Alle Punkte der gesuchten Gruppe G_δ entsprechen den beiden Gruppen der Involutionen III und II_δ, denen sie angehören. Um sie zu bestimmen, kann man also erst die Coincidenzgruppen zwischen II_δ und $I'_1, I'_2, I'_3, \ldots$ aufsuchen und alsdann feststellen, wie oft eine solche

Coincidenzgruppe mit der Gruppe $g_1, g_2, g_3 \ldots$ von III, der sie zugehört, einen Punkt gemein hat. Alle diese Punkte müssen, und keine anderen können den Reihen I und II_δ gemeinsam sein. Die Reihe II_δ hat aber mit $I_1', I_2', I_3' \ldots$ die Gruppen der Involution IV oder $B_{n-m+1} \ldots B_{n+1}, A_{n-m+1} \ldots A_{n+1}$ gemeinsam, und zwar erhält man sie (§ 33) projectivisch mit den Reihen homologer Glieder $I_1, I_2, I_3, \ldots$ der I', also auch projectivisch zu der Reihe III. Da dem Gliede $A_1 A_2 \ldots A_{n-m}$ der letzteren für $A_1 A_2 \ldots A_{n-m+1}$ (§ 40) jedes beliebige Element des Trägers zugehört, diesem Gliede von I aber $B_{n-m+2} \ldots B_{n+1}$ entspricht, so gehört in IV_δ $B_{n-m+1} B_{n-m+2} \ldots B_{n+1}$ der Gruppe $A_1 \ldots A_{n-m}$ und ebenso $A_{n-m+1} A_{n-m+2} \ldots A_{n+1}$ der Gruppe $B_1 \ldots B_{n-m}$ zu. Die Aufgabe, die Coincidenzpunkte der Reihen I und II_δ aufzusuchen, läſst sich mithin vollständig ersetzen durch die andere, die projectivischen Reihen

$$\text{III)} \quad A_1 A_2 \ldots A_{n-m}, \; B_1 B_2 \ldots B_{n-m}, \ldots \quad \text{und}$$
$$\text{IV}_\delta) \quad B_{n-m+1} \ldots B_{n+1}, \; A_{n-m+1} \ldots A_{n+1}, \ldots$$

zur Coincidenz zu bringen. Wird nun die ursprüngliche Beziehung, also II_δ, geändert, so werden einer festen Gruppe g_α der Involution III nach und nach die Coincidenzgruppen ihrer Reihe I_α' mit den Reihen $II_1, II_2, II_3, \ldots$ zugeordnet. Daher ergeben sich die Gruppen von IV, welche g_α für die verschiedenen Glieder der Involution V $(n+1)$ter Ordnung zugeordnet werden, in einer zu den Feldern $II_1', II_2', II_3', \ldots$ projectivischen Anordnung. Auch hier muſs man g_α die Gruppen $A_{n-m+1} A_{n-m+2} \ldots A_{n+1}$ beziehlich $B_{n-m+1} B_{n-m+2} \ldots B_{n+1}$ zuordnen, damit $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ und $B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$ entstehen. Damit ist der aufgestellte Lehrsatz völlig bestätigt.

§ 42. Man zerlege die beiden ausgezeichneten Gruppen irgendwie in je zwei Gruppen

$$A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} \ldots A_{i_{n-r+1}} \qquad A_{i_{n-r+2}} \ldots A_{i_{n+1}}$$
$$B_{k_1} B_{k_2} B_{k_3} \ldots B_{k_{n-r+1}} \qquad B_{k_{n-r+2}} \ldots B_{k_{n+1}}$$

zu $n-r+1$ und r Punkten. Jeder Gruppe ordne man die kreuzweis stehende, einer dritten festen Gruppe $\mathfrak{G}_1' \mathfrak{G}_2' \ldots \mathfrak{G}_{n-r+1}'$ der ersteren Involution aber nach und nach alle Gruppen $\mathfrak{G}_{n-r+2} \ldots \mathfrak{G}_{n+1}$ der letzteren zu. Die gemeinsamen Punkte je zweier so projectivisch bezogener Reihen bilden je eine Gruppe der Involution $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}, B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$. Die

Gruppen $\mathfrak{C}_{n+r+2} \ldots \mathfrak{C}_{n+1}$, die bei verschiedenen Zerlegungen demselben Gliede der Involution $(n+1)$ter Ordnung zugehören, sind homologe Glieder projectivischer Reihen, in welchen die aus $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ und $B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$ entnommenen Bestandtheile einander entsprechen.

Der Beweis folgt aus der mehrmaligen Anwendung von § 41.

§ 43. Es mögen jetzt Gruppen von $n-1$ Elementen mit A, B', C'', $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ u. s. w. bezeichnet werden, die Punkte $\mathfrak{A}_\lambda B'_\mu C''_\nu$ u. s. w. der Ebene aber nach wie vor einzelne Elemente des Trägers A anzeigen.

Durch irgend ein Element C_2 des Trägers ist eine Gruppe CC_1C_2 von $n+1$ Elementen der Involution $n+1$ter Ordnung AA_1A_2, BB_1B_2 bestimmt. Ist $\mathfrak{C}C_2$ ein Glied der Involution AA_1, BB_1, ist B_1 in dem Gliede $\mathfrak{B}$ der Involution A, $\mathfrak{C}$ enthalten, ist endlich C'_1C_2 ein Glied der Involution A_1A_2, B_1B_2, so sind CC_1 die Coincidenzpunkte der beiden Reihen:

$$A\mathfrak{B}\mathfrak{C} \ldots \barwedge B_2 C'_1 A_1 \ldots$$

Für viele Fälle reicht es aus, dafs CC_1 ein Glied der Involution $\mathfrak{C}B_2$, AA_1, sowie der analogen (z. B. von $\mathfrak{C}A_2$, BB_1) ist[18].

Anm. Es wird vorausgesetzt, dafs AA_1A_2 und BB_1B_2 nicht zusammenfallen.

Die Gruppe CC_1C_2 besteht (§ 42) aus den Coincidenzpunkten der beiden Reihen:

$$AA_1, \mathfrak{C}C_2, BB_1 \ldots \barwedge B_2, C_2, A_2 \ldots, \qquad 1)$$

und gehört daher (§ 40) der Involution

$$AA_1C_2 \quad , \quad \mathfrak{C}C_2B_2 \qquad 2)$$

an. Ihre Gruppen sind die Doppelpunkte der Reihen:

$$A, \mathfrak{C} \ldots \barwedge C_2B_2, C_2A_1 \ldots (§ 42). \qquad 3)$$

Die letztere Involution zerfällt in das Element C_2 und die Reihe B_2, $A_2 \ldots$, welche zu A, $\mathfrak{C}$, ... projectivisch ist (§§ 24—26). CC_1 ist mithin die Coincidenzgruppe zweier Reihen

$$A, \mathfrak{C} \ldots \barwedge B_2, A_1 \ldots, \qquad 4)$$

gehört der Involution AA_1, $\mathfrak{C}B_2$ an und besteht daher (§ 32) im Allgemeinen und höchstens aus n Punkten. Nach der Entwickelung von § 41 finden wir zu irgend einer Gruppe g von A, $\mathfrak{C}$ sein entsprechendes Glied

in 3), wenn wir die charakterisirende Reihe der Involution $AA_1, \mathfrak{C}C_2$, welche g bei der Erzeugungsweise $A, \mathfrak{C} \ldots \barwedge C_2, A_1 \ldots$ zugehört, mit der projectivisch entsprechenden Reihe $B_2, C_2 \ldots$ zur Coincidenz bringen. Der besonderen Gruppe $\mathfrak{B}$ von $A, \mathfrak{C}$ (welche B_1 enthält), müssen aber, damit $AA_1, \mathfrak{C}C_2, BB_1$ entstehen, A_1, C_2 und B_1 zugeordnet werden; für die Erzeugung 3) von CC_1C_2 gehören ihr folglich die Doppelelemente $C_1'C_2$ der Reihen

$$A_1 C_2 B_1 \ldots \barwedge B_2 C_2 A_2 \ldots$$

zu, welche ein Paar der Involution (§§ 24—26) A_1A_2, B_1B_2 bilden. CC_1 besteht, wie behauptet wurde, aus den Coincidenzpunkten der Reihen

$$A\mathfrak{C}\mathfrak{B} \ldots \barwedge B_2 A_1 C_1' \ldots$$

Im Allgemeinen gehört C_2 der Gruppe CC_1 nicht an, und es besteht dieselbe aus n von einander verschiedenen Punkten $C_1, C_3, \ldots C_{n+1}$; CC_1C_2 enthält dann $n+1$ verschiedene Punkte $C_1, C_2, C_3, \ldots C_{n+1}$. Es kann aber auch CC_1 bei C_2 einen $p_2 - 1$fachen, bei C_1 einen $p_1$fachen, bei C_3 einen $p_3$fachen, endlich bei C_l einen $p_l$fachen Punkt haben, wo dann

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_l = n + 1$$

ist. Alsdann sagen wir, dafs die zu C_2 gehörende Gruppe nur die l Punkte $C_1, C_2, \ldots C_l$ enthält, die aber $p_1$fach, $p_2$fach, $\ldots p_l$fach zählen. Vorläufig hängen die l Zahlen noch ab von der Art, wie wir die beiden ersten Gruppen eintheilten, davon, ob wir AA_1A_2 oder BB_1B_2 den Vorzug einräumten, endlich auch von dem Punkte, welchen wir von der untersuchten Gruppe als ursprünglich gegeben betrachteten und mit C_2 bezeichneten. Es könnten an die Stelle von $p_1, p_2, p_3, \ldots p_l$ die Zahlen $q_1, q_2, q_3, \ldots q_l$ treten, wenn wir innerhalb der angegebenen Grenzen eine Veränderung eintreten lassen. Die Punkte $C_1, C_2, \ldots C_l$ selbst bleiben aber nach § 42 ungeändert. Später wird sich indessen ergeben, dafs die einzelnen Zahlen p von der besonderen Erzeugung der Involution unabhängig sind. Übrigens giebt es nur eine endliche Anzahl solcher singulärer Involutionsgruppen.

Unbestimmt kann die Gruppe CC_1 dann allein werden, falls AA_1A_2 und BB_1B_2 nur verschiedene Anordnungen derselben Gruppe von $n+1$ Punkten sind. Wenn die beiden etwa gemeinsame Gruppe nicht mehr als $n-2$ Punkte enthält, so kann sie nach § 42 in A resp. B hinein-

genommen werden. A_1 und A_2 sind dann von B_1 und B_2 verschieden. Daher kann $\mathfrak{C}$ den Punkt A_1 nicht enthalten, und es ist auch CC_1 als Gruppe von $\mathfrak{C}B_2, AA_1$ nicht unbestimmt. Ist aber AA_1A_2 und BB_1B_2 eine Gruppe $n$ter Ordnung $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ gemeinsam, die durch zwei verschiedene Elemente A_1 und B_1 ergänzt wird, so ist die Gruppe CC_1C_2 den beiden Reihen

$$\mathfrak{D}A_1, \mathfrak{D}B_1, \mathfrak{D}C_2 \barwedge \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_1, C_2$$

coincident und daher auch in diesem Falle völlig bestimmt ($\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1 C_2$). Sind aber AA_1A_2 und BB_1B_2 nur verschiedene Anordnungen derselben Gruppe, ist also etwa A mit B, A_1 mit B_2, B_1 mit A_2 identisch, so hat man jeden einzelnen Punkt als der Beziehung

$$AA_1, AA_2, AC_2 \ldots \barwedge A_1, A_2, C_2 \ldots$$

genügend anzusehen.

§ 44. Es seien AA_1A_2, BB_1B_2 und CC_1C_2 drei Gruppen derselben Involution, deren Erzeugung auf die beiden ersteren sich stützt, und es sei D_2 irgend ein anderer Punkt des Involutionsfeldes. Man müsse in den projectivischen Reihen

$$AA_1, BB_1 \ldots \barwedge B_2, A_2 \ldots$$

einer festen Gruppe die Punkte Y_1 und Z_1 zuordnen, damit $\mathfrak{C}C_2$ und C_2, sowie $\mathfrak{D}D_2$ und D_2 einander entsprechen; man müsse ferner einer festen Gruppe von AA_1, CC_1 die Elemente X_2 und Z_2 zuordnen, damit in den Reihen

$$AA_1, CC_1 \ldots \barwedge C_2, A_2 \ldots$$

$B_2\mathfrak{C}$ und B_2, oder $\mathfrak{D}'D_2$ und D_2 einander entsprechen. Alsdann ist stets:

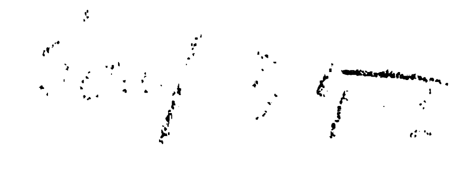
$$A_2B_2X_1Z_1 \barwedge A_2X_2C_2Z_2 .$$

Die festen Gruppen können nach der Entwickelung des § 41 beliebig ausgewählt werden; aus AA_1, BB_1 nehmen wir $\mathfrak{C}C_2$. Wir müssen ihr die Punkte A_2 uud B_2 zuordnen, wenn AA_1A_2 und BB_1B_2 entstehen sollen, Y_1 fällt mit C_2 zusammen. Z_1 ergiebt sich aus der Beziehung

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2 \barwedge B_2, A_2, Z_1, D_2 .$$

Der eine Wurf ist also hier

$$A_2B_2C_2Z_1 .$$



Die Involution $AA_1, \mathfrak{C}C_2$ entsteht aus der Beziehung

$$A, \mathfrak{C} \ldots \barwedge C_2, A_1 \ldots$$

Der dritten Gruppe $\mathfrak{B}$, welche B_1 enthält, müssen A_1, B_1, C_2 zugeordnet werden, damit sich die Gruppen $AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2$ ergeben. Es gehöre D_2 der Gruppe $\mathfrak{D}''$ der Involution $A, \mathfrak{C}$ an, und es sei

$$A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}'' \barwedge C_2 E_1 A_1 D_2 .$$

Nach § 33 ist dann

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2 \barwedge A_1, B_1, C_2, E_1 .$$

Man hat daher Z_1 aus

$$A_1 B_1 C_2 E_1 \barwedge B_2 A_2 Z_1 D_2$$

zu bestimmen.

Alsdann ist $A_2 B_2 C_2 Z_1$ der erste charakteristische Wurf, dessen Punkte also bei der von AA_1A_2 und BB_1B_2 ausgehenden Erzeugungsweise $AA_1, BB_1 \ldots \barwedge B_2, A_2 \ldots$ der Gruppe $\mathfrak{C}C_2$ zugeordnet werden müssen, damit die zu A_2, B_2, C_2, D_2 gehörenden Gruppen sich ergeben.

Die zweite Erzeugungsweise ist:

$$AA_1, CC_1 \ldots \barwedge C_2, A_2 \ldots$$

Der dritten Gruppe $B_2\mathfrak{C}$ (§ 43) der Involution AA_1, CC_1 müssen die Punkte A_2, B_2, C_2 zugeordnet werden, wenn die drei ersten Gruppen der Involution $(n+1)$ter Ordnung entstehen sollen. Die vierte Gruppe stellt sich ein, wenn man setzt:

$$AA_1, \mathfrak{C}B_2, CC_1, \mathfrak{D}'D_2 \barwedge C_2, Z_2, A_2, D_2 .$$

Die vier zu A_2, B_2, C_2, D_2 gehörenden Gruppen der zweiten Erzeugungsweise sind also projectivisch zu $A_2 B_2 C_2 Z_2$, so daſs X_2 mit B_2 zusammenfällt. Nach unserer Behauptung muſs

$$A_2 B_2 C_2 Z_1 \barwedge A_2 B_2 C_2 Z_2$$

sein, also Z_1 mit Z_2 übereinstimmen. Die Involution $AA_1, \mathfrak{C}B_2, CC_1, \mathfrak{D}'D_2$ enthält die Coincidenzgruppen der Reihen:

$$A, \mathfrak{C} \ldots \barwedge B_2, A_1 \ldots$$

Der dritten Gruppe $\mathfrak{B}$ von $A, \mathfrak{C}$, die B_1 enthält, müssen die Punkte A_1 oder B_2 entsprechen, wenn die Gruppen AA_1 oder $\mathfrak{C}B_2$ entstehen sollen,

für CC_1 mufs ihr der Punkt C_1' zugeordnet werden, der mit C_2 ein Paar der Involution $A_1 A_2 , B_1 B_2$ bildet (§ 43), so dafs

$$C_1' A_1 B_1 C_2 \barwedge C_1' B_2 A_2 C_2$$

ist. Endlich werde noch gesetzt:

$$A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}'' \barwedge B_2 F_1 A_1 D_2 \barwedge C_2 E_1 A_1 D_2 \ ,$$

so ist nach § 33

$$AA_1 , \mathfrak{C}B_2 , CC_1 , \mathfrak{D}' D_2 \barwedge A_1 , B_2 , C_1' , F_1$$

und

$$A_1 B_2 C_1' F_1 \barwedge C_2 Z_2 A_2 D_2 \ .$$

Die Behauptung ist also an die nachstehende Folge projectivischer Beziehungen geknüpft:

$$\begin{array}{ccc}
A\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}'' & \barwedge & C_2 E_1 A_1 D_2 \\
\hline
C_2 E_1 A_1 D_2 & \barwedge & B_2 F_1 A_1 D_2 \\
A_1 B_1 C_2 E_1 & \barwedge & B_2 A_2 Z_1 D_2 \\
C_1' A_1 B_1 C_2 & \barwedge & C_1' B_2 A_2 C_2 \\
A_1 B_2 C_1' F_1 & \barwedge & C_2 Z_2 A_2 D_2 \\
A_2 B_2 C_2 Z_1 & \barwedge & A_2 B_2 C_2 Z_2 \ .
\end{array}$$

§ 45. Fortsetzung. Die Gruppen A und B gewinnen nur durch die erste Reihe Einflufs. Nachdem E_1 durch den Wurf $AB\mathfrak{C}\mathfrak{D}''$ aus C_2, A_1 und D_2 bestimmt worden ist, erfolgt Alles lediglich durch Combination des neu gewonnenen Punktes mit $A_1 , B_1 , A_2 , B_2 , C_2$ und D_2. Das System der Relationen bleibt also richtig oder falsch, wenn die Involution $A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}''$ zu sich selbst projectivisch geändert wird. Ist $A'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}''' \barwedge A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}''$ ein Wurf einer anderen Involution von nicht höherer als der $n-1$ten Ordnung, enthalten $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{D}'''$ die Elemente B_1 und D_2, und ist $B'B_1$ ein Glied der Involution $A'A_1 , \mathfrak{C}' C_2$, so knüpft sich der entsprechende Satz für die Involution $A'A_1 A_2 , B'B_1 B_2$ an ganz dieselben Beziehungen.

Wir ersetzen nun $A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}''$ durch den projectivischen Punktwurf $B_2 B_1 \mathfrak{C}_0 D_2$ und erhalten demgemäfs, falls $B_0 B_1$ in der Involution $B_2 A_1$, $\mathfrak{C}_0 C_2$ liegt, die Involution dritter Ordnung

$$B_2 A_1 A_2 \quad , \quad B_0 B_1 B_2 \ .$$

Auch alle anderen Glieder derselben, z. B. $C_0 B_2 C_2$ und $D_0 B_2 D_2$, enthalten den Punkt B_2. Ein charakteristischer Wurf der vier zu A_2, B_2, C_2, D_2 gehörenden Gruppen bleibt aber (§ 43) sich selbst projectivisch, wenn man eine neue Entstehungsweise der Involution auf dieselben beiden Gruppen, stützt, wie die ältere. Die beiden Würfe können daher aus den beiden Erzeugungsweisen

$$B_2 A_1, B_2 B_0, \dots \barwedge B_1, A_2, \dots$$

und

$$B_2 A_2, B_2 C_0, \dots \barwedge C_2, A_1, \dots$$

entnommen werden. Also hat man es mit zwei charakteristischen Würfen der Involution

$$A_1 A_2, B_0 B_1, C_0 C_2, D_0 D_2$$

zu thun, deren einer den Paaren $A_1 A_2$ und $B_0 B_1$, deren anderer den Paaren $A_1 A_2$ und $C_0 C_2$ zugehört. Beide sind, wie wir auf ganz anderem Wege in den §§ 24—26 gesehen haben, unter einander projectivisch. Für diese besondere Involution ist mithin der Satz richtig. Selbst in diesem Falle aber zieht er die Folge projectivischer Beziehungen nach sich.

Zuerst entstehen die Gruppen aus

$$B_2 A_1, B_0 B_1 \dots \barwedge B_2, A_2 \dots,$$

und setzt man

$$B_2 A_1, B_0 B_1, \mathfrak{C}_0 C_2, \mathfrak{D}_0 D_2 \barwedge B_2, A_2, Z_1, D_2,$$

so ist $A_2 B_2 C_2 Z_1$ der erste Wurf. Die Involution $B_2 A_1, \mathfrak{C}_0 C_2$ enthält die Coincidenzpaare aller Reihenpaare

$$B_2, \mathfrak{C}_0 \dots \barwedge C_2, A_1 \dots;$$

aus

$$B_2 B_1 \mathfrak{C}_0 D_2 \barwedge C_2 E_1 A_1 D_2$$

folgt dann:

$$B_2 A_1, B_0 B_1, \mathfrak{C}_0 C_2, \mathfrak{D}_0 D_2 \barwedge A_1, B_1, C_2, E_1.$$

Die zweite Erzeugungsweise ist hier:

$$B_2 A_1, C_0 B_2, \dots \barwedge C_2, A_2, \dots$$

Dem Paare $\mathfrak{C}_0 B_2$ müssen, damit $B_2 A_1 A_2$ und $C_0 C_2 B_2$ sich ergeben, A_2 resp. C_2 zugeordnet werden. $B_0 B_2 B_1$ entsteht, wenn ihm B_2 zugeordnet wird; denn die Doppelpunkte der beiden Reihen

$$A_1 \mathfrak{C}_0 C_0 \dots \barwedge C_2 B_2 A_2 \dots$$

bilden ein Paar beider Involutionen

$$A_1 A_2 , C_0 C_2 \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{E}_0 C_2 , A_1 B_2 \; ;$$

sie fallen also mit $B_0 B_1$ zusammen. Ist noch

$$B_2 A_1 , B_2 \mathfrak{E}_0 , B_2 C_0 , B_2 D_2 \barwedge C_2 , Z_2 , A_2 , D_2 \; ,$$

so ist $A_2 B_2 C_2 Z_2$ der zweite Wurf. Die Paare der Involution $B_2 A_1 , B_2 \mathfrak{E}_0$ entstehen aus den Reihen

$$B_2 , \mathfrak{E}_0 \ldots \barwedge B_2 , A_1 \ldots$$

Dem Punkte B_1 der ersteren Reihe müssen wir B_2 , A_1 , C_1' zuordnen, um $B_2 \mathfrak{E}_0 , B_2 A_1 , B_2 C_0$ zu erhalten. Letzteres ergiebt sich hier als specieller Fall des in § 43 Bewiesenen. Setzt man endlich

$$B_2 B_1 \mathfrak{E}_0 D_2 \barwedge B_2 F_1 A_1 D_2 \barwedge C_2 E_1 A_1 D_2 \; ,$$

so folgt:

$$B_2 A_1 , B_2 \mathfrak{E}_0 , B_2 C_0 , B_2 D_2 \barwedge A_1 , B_2 , C_1' , F_1 \; .$$

Daher gilt hier folgende Gruppe von projectivischen Beziehungen:

$$\begin{array}{c} B_2 B_1 \mathfrak{E}_0 D_2 \barwedge C_2 E_1 A_1 D_2 \\ \hline C_2 E_1 A_1 D_2 \barwedge B_2 F_1 A_1 D_2 \\ A_1 B_1 C_2 E_1 \barwedge B_2 A_2 Z_1 D_2 \\ C_1' A_1 B_1 C_2' \barwedge C_1' B_2 A_2 C_2 \\ A_1 B_2 C_1' F_1 \barwedge C_2 Z_2 A_2 D_2 \\ A_2 B_2 C_2 Z_1 \barwedge A_2 B_2 C_2 Z_2 \end{array}$$

Dieselben sind ihrer zweiten Herkunft nach alle erfüllt. Da aber

$$A \mathfrak{B} \mathfrak{E} \mathfrak{D}'' \barwedge B_2 B_1 \mathfrak{E}_0 D_2$$

ist, so ist E_1 dasselbe Element in beiden Reihen (§§ 44 und 45), und es gelten daher auch die ersteren Beziehungen. Diese ihrerseits beweisen den Lehrsatz des § 44.

§ 46. Ist $C C_1 C_2$ eine dritte Gruppe der Involution $A A_1 A_2 , B B_1 B_2$, so kann man jedes andere Glied derselben als Coincidenzgruppe der Reihen

$$A A_1 , B B_1 , \ldots \barwedge B_2 , A_2 , \ldots$$

und

$$A A_1 , C C_1 , \ldots \barwedge C_2 , A_2 , \ldots$$

erhalten, wenn es aus $n+1$ verschiedenen Punkten des Involutionsfeldes

besteht. Auch die singulären Gruppen ergeben sich in beiden Fällen übereinstimmend, wenn irgend zwei Gruppen $D_1 D_2 \dots D_{n+1}$ und $E_1 E_2 \dots E_{n+1}$ der Involution aus $n+1$ verschiedenen Punkten bestehen. Die Elemente, welche zwei festen Gliedern von AA_1, BB_1 und AA_1, CC_1 zugeordnet werden müssen, damit dieselbe Gruppe der Involution AA_1A_2, BB_1B_2 entsteht, sind homologe Glieder projectivischer Reihen.

CC_1C_2 und BB_1B_2 mögen resp. aus den Beziehungen entstehen

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}'\mathfrak{C}_1' \dots \;\overline{\wedge}\; B_2, A_2, \mathfrak{C}_2 \dots$$
$$AA_1, \mathfrak{B}'\mathfrak{B}_1', CC_1 \dots \;\overline{\wedge}\; C_2, \mathfrak{B}_2, A_2 \dots$$

Ist nun

$$A_2B_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2 \;\overline{\wedge}\; A_2\mathfrak{B}_2C_2\mathfrak{D}_2',$$

so ergeben

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_2 \dots \;\overline{\wedge}\; B_2, A_2, \mathfrak{D}_2 \dots$$

und

$$AA_1, \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, CC_1 \dots \;\overline{\wedge}\; C_2, \mathfrak{D}_2', A_2 \dots$$

entweder dieselben Coincidenzpunkte, oder beide haben überhaupt keine solchen (§ 45). Jede reguläre Gruppe von $n+1$ Elementen der Involution AA_1A_2, BB_1B_2 ist daher auch eine Gruppe von AA_1A_2, CC_1C_2. Die Punkte einer singulären Gruppe der ersteren Involution gehören alle auch einer Gruppe der zweiten Involution an, möglicherweise aber mit einer anderen Disposition über die vielfachen Elemente. Es sei FF_1F_2 die zu F_2 gehörende singuläre Gruppe, die aus AA_1A_2 und BB_1B_2 entsteht. Die Involution kann dann auch von AA_1A_2 und FF_1F_2 aus entstehen, und, wenn EE_1E_2 eine Gruppe von $n+1$ verschiedenen Punkten ist, von dieser und von FF_1F_2 aus. Dabei ergiebt sich sicher die aus $n+1$ verschiedenen Elementen bestehende Gruppe DD_1D_2. Ist daher $D_2\mathfrak{F}$ eine Gruppe der Involution EE_1, FF_1, so gehören EE_1, DD_1 und $F_2\mathfrak{F}$ zu einer Involution. Dadurch ist zunächst $\mathfrak{F}$ unzweideutig bestimmt, und darnach FF_1, da man dieser einen Bestimmung noch eine zweite von EE_2 ausgehende an die Seite stellen kann. Ganz denselben Bedingungen genügt aber auch die Gruppe $F'F_1'$, die man als Ergänzung zu F_2 von den beiden Gruppen AA_1A_2 und CC_1C_2 aus erhält; beide sind daher mit einander identisch. Es könnte ferner den einzelnen Punkten von FF_1F_2 eine verschiedene Werthigkeit zukommen, je nachdem der eine oder andere

ihrer Punkte ursprünglich gegeben ist. Wenn nun F_2 gegeben und alsdann FF_1 ermittelt war, so ist DD_1D_2 die Coincidenzgruppe der Reihen

$$E, \mathfrak{F}', F \ldots \barwedge F_1F_2, \mathfrak{F}_1D_2, E_1E_2 \ldots,$$

wo $\mathfrak{F}'$ neben D_2 noch $n-2$ andere Punkte $\mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_4, \ldots \mathfrak{D}_n$ enthält. Da aber dann DD_1 der Involution $E\mathfrak{F}_1, F_1F_2\ \mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4 \ldots \mathfrak{D}_n$ angehört, so ist zuerst die Gruppe $\mathfrak{F}'$, und dann F in einer Weise bestimmt, welche davon unabhängig ist, ob ursprünglich F_1 oder F_2 gegeben war.

§ 47. Sind $C_1C_2 \ldots C_{n+1}$ und $D_1D_2 \ldots D_{n+1}$ irgend zwei Gruppen der Involution $A_1A_2A_3 \ldots A_{n+1}, B_1B_2B_3 \ldots B_{n+1}$ mit wenigstens zwei regulären Gruppen, so können alle ihre Glieder auch als Coincidenzgruppen der projectivischen Reihen

$$C_1C_2 \ldots C_{n-r+1}, D_1D_2 \ldots D_{n-r+1}, \ldots \barwedge D_{n-r+2} \ldots D_{n+1}, C_{n-r+2} \ldots C_{n+1}, \ldots$$

aufgefaſst werden. Die einzelne Gruppe der Involution $(n+1)$ter Ordnung kann durch die bestimmte Gruppe $\mathfrak{C}_{n-r+2} \ldots \mathfrak{C}_{n+1}$ charakterisirt werden, die man einer fest ausgewählten Gruppe der ersteren Involution zuordnen muſs, damit sie als Coincidenzgruppe entstehe. Zwei Gruppen, welche bei zwei verschiedenen Erzeugungsweisen dieselbe Gruppe charakterisiren, sind entsprechende Elemente projectivischer Gebilde. Wir bezeichnen eine gegebene Anordnung von Gruppen einer Involution $(n+1)$ter Ordnung als projectivisch mit allen denjenigen unter sich projectivischen Involutionen, welche diese Anordnung charakterisiren.

Zusatz 1. Die Involution ist durch zwei ihrer Glieder bestimmt.

Zusatz 2. Ist ein Element zwei Gruppen gemeinsam, so ist es allen Gruppen gemeinsam.

Zusatz 3. Gehört eine Gruppe G von $n+1$ Punkten gleichzeitig den Involutionen

$$U_1V_2, V_1U_2\ ;\ U_1V_3, V_1U_3\ ;\ U_1V_4, V_1U_4\ ;\ U_1V_\lambda, V_1U_\lambda$$

an, sind $U_1U_2U_3 \ldots$ Glieder einer Involution $(n-r)$ter Ordnung, $V_1, V_2, V_3 \ldots$ Glieder einer Involution $r$ter Ordnung, so ist

$$U_1U_2U_3 \ldots U_\lambda \ldots \barwedge V_1V_2V_3 \ldots V_\lambda \ldots,$$

und G die Coincidenzgruppe dieser Reihen.

Der Lehrsatz selbst, wie auch Zusatz 1, folgt aus § 46 und § 42, der Zusatz 2 aus § 33, 2, wenn man das gemeinsame Element in die Gruppen $C_1 \ldots C_{n-r+1}$ und $D_1 D_2 \ldots D_{n-r+1}$ aufnimmt.

Gehört für den Zusatz 3 irgend ein Element P von G den Gruppen U und V der Involutionen an, so ist G die Coincidenzgruppe der Reihen

$$UU_1U_2 \ldots \barwedge VV_1V_2 \ldots \quad ; \quad UU_1U_3 \ldots \barwedge VV_1V_3 \ldots$$
$$UU_1U_4 \ldots \barwedge VV_1V_4 \ldots ; \ldots ; \quad UU_1U_\lambda \ldots \barwedge VV_1V_\lambda \ldots$$

Daher mufs

$$UU_1U_2U_3U_4 \ldots U_\lambda \ldots \barwedge VV_1V_2V_3V_4 \ldots V_\lambda \ldots$$

sein; im anderen Falle würden die verschiedenen Reihenpaare verschiedene Gruppen der Involution UV_1, VU_1 ergeben.

Hiermit ist § 33 mit allen seinen Zusätzen von n auf $n+1$ übertragen.

§§ 48—56. *Von den singulären Gruppen der Involutionen $n+1$ter Ordnung.*

§ 48. Neben zwei $(n+1)$fachen Elementen kann eine Involution $(n+1)$ter Ordnung nur noch reguläre Gruppen enthalten. Sind $\mathrm{A}D_1$ und $\mathrm{A}D_2$ die $(n+1)$fachen Strahlen einer Strahleninvolution mit imaginärem unendlich fernen Centrum A, so liegen die $n+1$ reellen Punkte je einer Gruppe auf je einer D_1 und D_2 beigeordneten Kette der Punktebene A, ausgeschnitten durch $n+1$ von einander verschiedene Halbketten D_1, D_2 derselben. Je zwei verschiedene Sätze von $n+1$ Halbketten trennen einander. Irgend $n+1$ zusammengehörige Halbtangenten schliefsen sich mit einem anderen derartigen Satze zu einer reellen Gruppe der Involution mit den $(n+1)$ fachen Strahlen $D_1\mathrm{A}$ und $D_1\mathrm{A}^1$ zusammen. Das Punktfeld eines projectivischen Strahlbüschels $\mathrm{A}E$, $\mathrm{A}E_1$ ist stetig auf das Involutionsfeld so bezogen, dafs Halbketten E_1, E_2 und Gruppen von $n+1$ Halbketten D_1, D_2, sowie E_1, E_2 und D_1, D_2 beigeordnete Ketten einander entsprechen. In den reell-projectivischen Tangentenbüscheln in E_1, E_2 und D_1, D_2 entsprechen die Strahlen und Strahlengruppen $E_1\mathrm{A}$, $E_2\mathrm{A}^1$, $(D_1\mathrm{A})^{n+1}$, $(D_2\mathrm{A}^1)^{n+1}$ einander. Die

Tangenten in D_1 und E_1 bewegen sich in einer, diejenigen in D_2 und E_2 in der entgegengesetzten Richtung.

Da der Satz für $n = o$ und $n = 1$ (§§ 27—30) richtig ist, so braucht nur noch von n auf $n + 1$ geschlossen werden. Irgend eine der betrachteten Involutionsgruppen ist den projectivischen Feldern

$$D_1^n D_2^n \ldots \;\overline{\wedge}\; D_2 D_1 \ldots$$

gemeinsam. Jeder D_1 und D_2 beigeordneten Kette des Involutionsfeldes entspricht eine D_2 und D_1 beigeordnete Kette im Punktfelde. Mit dem Übergange der ersten von D_1 nach D_2 ist der umgekehrte bei der zweiten Reihe verknüpft. Beide begegnen einander daher einmal, und auf dieser Kette liegt die untersuchte Gruppe.

Andererseits entspricht je einer Gruppe von n Halbketten D_1, D_2 eine Halbkette D_2, D_1. Schreiten die n Halbtangenten in D_1 in einer Richtung fort, so mufs die Tangente in D_2 der entsprechenden Halbkette in derselben, diejenige in D_1 also in der entgegengesetzten Richtung sich bewegen. Während diese eine volle Umdrehung macht, beschreibt jede einzelne jener Halbtangenten in der entgegengesetzten Richtung einen der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Halbstrahlen der Anfangsgruppe. Man erhält daher $n + 1$ beiden entsprechend gemeinsame Halbstrahlen. Von ihnen liegen zwei in demjenigen der bezeichneten n Winkel, in welchem der der Anfangsgruppe entsprechende Halbstrahl liegt, und je einer befindet sich in jedem der $n - 1$ übrigen Winkel. Bei der Beziehung, aus welcher die $n + 1$ Halbstrahlen entstehen, werden den Gruppen $(D_1 A)^n$ und $(D_1 A^1)^n$ die Strahlen $D_1 A^1$ und $D_1 A$ zugeordnet. Die $n + 1$ gefundenen Halbstrahlen bilden daher Theile einer Gruppe der Involution mit den $(n + 1)$fachen Strahlen $(D_1 A)^{n+1}$ und $(D_1 A^1)^{n+1}$ (§ 40).

Will man eine zweite Gruppe betrachten, so kann man das Involutionsfeld festhalten, das Punktfeld aber so verschieben, dafs D_2 und D_1 fest bleiben. Diese Verschiebung soll sehr gering sein, so dafs die Halbtangenten aller Halbketten in D_1 in derselben Richtung um einen kleinen Winkel gedreht werden. An die Stelle einer gemeinsamen treten zwei einander nahe gelegene und zugeordnete Halbketten. Zwischen beiden liegt eine den neuen Gebilden gemeinsame Halbkette, die also in demselben Sinne verschoben ist, wie alle Halbketten D_1, D_2. Die Invo-

lution $(n+1)$ter Ordnung ist aber, wie zu dem Strahlbüschel $\mathfrak{A}E_1, \mathfrak{A}E_2$, so zu allen Strahlbüscheln $\mathfrak{A}D_1, \mathfrak{A}D_2$ projectivisch, welche festen Strahlengruppen der Involution $n$ter Ordnung $(\mathfrak{A}D_1)^n, (\mathfrak{A}D_2)^n$ zugeordnet werden müssen, damit sie entsteht. Da hierbei $E_1\mathfrak{A}$ und $D_1\mathfrak{A}$, sowie $E_1\mathfrak{A}^1$ und $D_1\mathfrak{A}^1$ in den Tangentenbüscheln an E_1 und D_1 einander entsprechen, so gehören den Strahlen $E_1\mathfrak{A}$ und $E_1\mathfrak{A}^1$ die Gruppen $(D_1\mathfrak{A})^{n+1}$ und $(D_1\mathfrak{A}^1)^{n+1}$ zu. Ferner bewegen sich die $n+1$ Halbtangenten in D_1 auch in demselben Sinne, wie diejenige in E_1. Für zwei entgegengesetzte Halbketten E_1, E_2 werden jeder Halbkette D_1^n, D_2^n zwei entgegengesetzte Halbketten D_1, D_2 zugeordnet. Beide Halbketten D_1^{n+1}, D_2^{n+1} schliefsen sich daher in D_1 und D_2 je derselben Strahlengruppe an.

Aus einer analogen Betrachtung folgt leicht, dafs den E_1 und E_2 beigeordneten Ketten D_1 und D_2 beigeordnete entsprechen, die sich mit jenen stetig verschieben.

§ 49. Die Elemente, welche den Reihen

$$1)\ AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 \ldots \barwedge 2)\ B'B'_1B'_2, A'A'_1A'_2, C'C'_1C'_2 \ldots$$

gemeinsam sind, bilden auch eine Coincidenzgruppe zweier Reihen

$$3)\ AA_1A'_2, BB_1B_2 \ldots \barwedge 4)\ B'B'_1B'_2, A'A'_1A_2 \ldots$$

Die Glieder der Involution AA_1A_2, BB_1B_2 entstehen, wenn man auf eine feste Anordnung I der Involution $AA_1, BB_1 \ldots$ unendlich viele zu ihr und daher unter sich projectivische Anordnungen $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \mathrm{I}_4 \ldots$ des einförmigen Gebildes $B_2, A_2 \ldots$ bezieht. Gleichstellige Glieder fassen sich zu Reihen $\mathrm{I}'_1, \mathrm{I}'_2, \mathrm{I}'_3, \mathrm{I}'_4 \ldots$ zusammen, die alle die Gruppen A_2 und B_2 entsprechend gemeinsam haben und zu der gegebenen Anordnung AA_1A_2, $BB_1B_2 \ldots$ projectivisch sind. Jeder Gruppe G_α von AA_1, BB_1 gehört eine solche Reihe zu. Entsprechend entstehen die Gruppen der Involution $A'A'_1A'_2, B'B'_1B'_2$, indem man auf eine fest gegebene Anordnung II der Involution $B'B'_1, A'A'_1 \ldots$ die zu ihr und daher unter sich projectivischen Anordnungen $\mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3, \mathrm{II}_4 \ldots$ bezieht, die alle A_2 und B_2 als $B'B'_1$ und $A'A'_1$ entsprechende Gruppen mit einander gemein haben. Gleichstellige Elemente der Reihen II schliefsen sich zu Reihen $\mathrm{II}'_1, \mathrm{II}'_2, \mathrm{II}'_3 \ldots$ zusammen, die alle zu der gegebenen Anordnung der Involution $B'B'_1B'_2$,

$A'A'_1A'_2 \ldots$ projectivisch sind und als diesen Gruppen entsprechend B'_2 und A'_2 mit einander gemein haben. Dem Paare G_α und H_β der Involutionen I und II kann man jedes Paar entsprechender Elemente der Reihen I'_α und II'_β zuordnen. Jeder gemeinsame Punkt der beiden projectivischen Involutionen $(n+1)$ter Ordnung ist vier entsprechenden Gebilden gemeinsam. Es genügt daher, der Zusammenstellung G_α, H_β das I'_α und II'_β gemeinsame Paar der Involution $A_2A'_2, B_2B'_2$ zuzuordnen. Elemente, welche drei Gebilden gemeinsam sind, die so zusammengehören, genügen der gestellten Aufgabe. Hält man G_α und damit I'_α fest, läfst aber H_β die Reihe $H_1H_2H_3\ldots$ durchlaufen, so treten $\mathrm{II}'_1, \mathrm{II}'_2, \mathrm{II}'_3 \ldots$ an die Stelle von II'_β. Da nun einem festen Elemente von I'_α die Elemente einer zu $H_1H_2H_3\ldots$ oder II projectivischen Reihe II_δ nach und nach zugeordnet werden, so ergeben sich nun die Paare der Involution $A_2A'_2, B_2B'_2$ in einer zu II projectivischen Anordnung III_α. Den Gruppen $A'A'_1$ und $B'B'_1$ von II gehören dabei, wie G_α auch gewählt ist, die Gruppen $B_2B'_2$ und $A_2A'_2$ von III_α zu. Dem Elemente $A'A'_1$ nämlich wird jedes beliebige Element zugeordnet, wenn $A'A'_1A'_2$ entstehen soll. Das ihm zugehörige Glied BB_1B_2 der ersten Involution $(n+1)$ter Ordnung wird aber in der Reihe I'_α durch B_2 charakterisirt. B_2 ist daher ein Theil des $A'A'_1$ zugehörenden Paares. Da $A'A'_1$ für jede von $A'A'_1A'_2$ verschiedene Gruppe der zweiten Involution $(n+1)$ter Ordnung B'_2 zugehört, und diesem Punkte des Feldes also jede Gruppe von I'_α entspricht, so ist B'_2 der andere Theil des $A'A'_1$ für jede Gruppe G_α zugehörigen Paares $B_2B'_2$. Die verschiedenen Reihen III_α haben daher alle $B_2B'_2$ und $A_2A'_2$ als $A'A'_1$ und $B'B'_1$ entsprechende Paare gemein. Da nun Ähnliches auch gilt, wenn man ein Element H_β von II fixirt, so ist folgende Beziehung erfüllt: Irgend zwei Gruppen der Involutionen

$$\text{I)}\ AA_1, BB_1 \ldots \qquad \text{II)}\ A'A'_1, B'B'_1 \ldots$$

entspricht e i n bestimmtes Paar der Involution

$$\text{III)}\ B_2B'_2, A_2A'_2 \ldots ;$$

dasselbe beschreibt, wenn die eine Gruppe festgehalten wird, eine mit der anderen projectivische Reihe.

Die gesuchten Punkte gehören drei zusammengehörigen Gebilden gleichzeitig an. Die ganze Betrachtung kann, nachdem die symmetrisch

auftretenden Grösen A_2, A'_2 vertauscht sind, rückwärts gemacht werden; sie zeigt dann, dafs die gesuchten Punkte auch einem Reihenpaare

$$AA_1A'_2, BB_1B_2 \ldots \barwedge B'B'_1B'_2, A'A'_1A_2 \ldots$$

gemeinsam sind.

§ 50. Zwei projectivische Involutionen $(n+1)$ter Ordnung desselben Trägers haben höchstens $2(n+1)$ Elemente mit einander entsprechend gemein.

Im Allgemeinen hat man für die beiden Involutionen die Erzeugungsweisen

1) $$LL_1, MM_1, \mathfrak{R}'\mathfrak{R}'_1 \ldots \barwedge M_2, L_2, \mathfrak{R}_2 \ldots$$

und

2) $$PP_1, QQ_1, \mathfrak{R}'\mathfrak{R}'_1 \ldots \barwedge Q_2, P_2, \mathfrak{R}_2 \ldots$$

zu wählen, die nicht von Paaren entsprechender Gruppen ausgehen; $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_2$ durchlaufen die projectivischen Reihen

$$\mathfrak{R}_2\mathfrak{R}'_2\mathfrak{R}''_2\mathfrak{R}'''_2 \ldots \barwedge \mathfrak{R}_2\mathfrak{R}'_2\mathfrak{R}''_2\mathfrak{R}'''_2 \ldots,$$

in denen im Allgemeinen den Elementen L_2, M_2 nicht P_2, Q_2 entsprechen. Jeder Gruppe der ersten Involution gehört eine Erzeugungsweise 1, folglich ein Punktepaar $\mathfrak{R}_2^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{R}_2^{(\lambda)}$ zu. Es ist aber nicht ausgemacht, ob den Reihen 2)

$$PP_1, QQ_1, \mathfrak{R}\mathfrak{R}_1 \ldots \barwedge Q_2, P_2, \mathfrak{R}_2^{(\lambda)} \ldots,$$

die wir so erhalten, eine Gruppe der zweiten Involution gemeinsam ist. Jeder Coincidenzpunkt der beiden Involutionen bedingt aber zwei wirkliche entsprechende Gruppen (§ 43). Haben beide Reihen weniger als zwei Paare entsprechender wirklicher Gruppen, so ist der Satz selbstverständlich. Giebt es zwei Gruppen AA_1A_2 und BB_1B_2, denen wirkliche Gruppen $A'A'_1A'_2$ und $B'B'_1B'_2$ der zweiten Involution entsprechen, so können die Erzeugungsweisen des § 49 benutzt werden. Ist das Element C_2 zwei entsprechenden Gruppen CC_1C_2 und $C'C'_1C_2$ gemeinsam, so ist

$$AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2, \ldots \barwedge A'A'_1A'_2, B'B'_1B'_2, C'C'_1C_2, \ldots;$$

also gehören (§ 49) die gesuchten Punkte auch einem Reihenpaar

$$AA_1C_2, CC_1C_2 \ldots \barwedge A'A'_1A'_2, C'C'_1A_2$$

gleichzeitig an. Neben C_2 kommen noch die etwa vorhandenen Coincidenzpunkte der Reihen

$$AA_1, CC_1 \ldots \barwedge A'A'_1A'_2, C'C'_1A_2 \ldots$$

in Betracht. Ist ein weiterer Doppelpunkt vorhanden, so sind die übrigen zwei projectivischen Involutionen $n$ter Ordnung entsprechend gemein. So weiter schliefsend, gelangt man zu dem Lehrsatze.

§ 51. In zwei projectivisch bezogenen einförmigen Gebilden entspricht jeder Involution AA_1A_2, BB_1B_2 $(n+1)$ter Ordnung eine zu ihr projectivische aa_1a_2, bb_1b_2 gleicher Ordnung[19].

Die gegebene Involution entsteht aus den projectivischen Reihen

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}'\mathfrak{C}'_1 \ldots \barwedge B_2, A_2, \mathfrak{C}_2 \ldots,$$

wo nur $\mathfrak{C}_2$ beweglich ist, und zu ihm die Gruppe der Involution sich projectivisch ändert. Die entsprechende Involution entsteht aus den beiden Gebilden

$$aa_1, bb_1, \mathfrak{c}'\mathfrak{c}'_1 \ldots \barwedge b_2, a_2, \mathfrak{c}_2 \ldots.$$

Wird nun vorausgesetzt, dafs aus der Involution $AA_1, BB_1, \mathfrak{C}'\mathfrak{C}'_1$ die projectivische $aa_1, bb_1, \mathfrak{c}'\mathfrak{c}'_1$ entsteht, so folgt dasselbe nach der im § 47 acceptirten Definition auch für die Involutionen $(n+1)$ter Ordnung weil $\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{C}_2$ zu einander sich projectivisch bewegen.

Anm. Da somit jede gerade Involution von allen Punkten aus durch eine projectivische Strahleninvolution projicirt, jede Strahleninvolution durch jede Gerade in einer Punktinvolution geschnitten wird, so genügt es wirklich, den einen Fall des Strahlbüschels mit imaginärem Centrum A zu behandeln.

§ 52. In einem aus zwei verschiedenen Gruppen AA_1A_2 und BB_1B_2 entstehenden Involutionsfeld bestimmt irgend ein genügend nahe bei A_2 gelegener Punkt C_2 eine Gruppe CC_1C_2 von $n+1$ verschiedenen Punkten, von denen je einer bei einem einfachen und p verschiedene bei einem $p$fachen Punkte der Gruppe AA_1A_2 liegen. Daher giebt es in jeder Involution Gruppen aus $n+1$ von einander verschiedenen Punkten.

Wenn $\mathfrak{C}C_2$ der Involution AA_1, BB_1 angehört, so ist CC_1 (§ 43) ein Glied von $\mathfrak{C}B_2, AA_1$. Da $\mathfrak{C}$ bei A (§ 36a), B_2 aber von allen Punkten A und A_1 getrennt liegt, so müssen (§ 36b) auch von CC_1 sich $n-1$ Punkte der Gruppe A nähern. A_1 ist aber in AA_1 beliebig; es liegen somit bei allen Punkten von AA_1A_2, und nur bei diesen, Punkte von CC_1C_2.

Ist nun irgend ein einfacher Punkt, sagen wir A_1, in AA_1A_2 enthalten, so möge $\mathfrak{C}'C_1$ zu AA_2, BB_2, und folglich CC_2 zu $AA_2, \mathfrak{C}'B_1$ gehören. $\mathfrak{C}'$ nähert sich, wenn C_2 an A_2 heranrückt, der Gruppe $\mathfrak{D}$, welche mit A_1 ein Glied von AA_2, BB_2 bildet, und deren Punkte daher von AA_2 endlich entfernt liegen. Da folglich $AA_2, \mathfrak{C}'B_1$ eine Involution mit zwei getrennten Gruppen ist, so enthält sie (§ 36a) in der Nähe von AA_2 nur reguläre Gruppen, von denen p verschiedene Punkte bei einem $p$fachen von AA_2 liegen.

Enthält AA_1A_2 zwar verschiedene Punkte, die aber alle mehrfach zählen, so sei A_1 ein $p$facher Punkt, und $(A)^{n-p}$ die Gruppe der übrigen. BB_1B_2 zerlege man in zwei Gruppen $(B)^p$ und $(B)^{n-p}$. Sind dann $C_1(\mathfrak{C})^{p-1}$ und $C_1(\mathfrak{C})^{n-p-1}$ Gruppen von $A_1^p, (B)^p$ und $(A)^{n-p}, (B)^{n-p}$, so gehört CC_2 als Glied zu der Involution $(A)^{n-p}(\mathfrak{C})^{p-1}, (B)^p(\mathfrak{C})^{n-p-1}$. Bei genügender Annäherung von C_1 an A_1 nähern sich $A^{n-p}(\mathfrak{C})^{p-1}$ und $(\mathfrak{C})^{n-p-1}(B)^p$ den Gruppen $(A)^{n-p}A_1^{p-1}, (B)^p(\mathfrak{D})^{n-p-1}$, wo $A_1(\mathfrak{D})^{n-p-1}$ der Involution $(A)^{n-p}, (B)^{n-p}$ angehört. Da nun $(\mathfrak{D})^{n-p-1}$ sicher keinen Punkt von $(A)^{n-p}$ und nur ausnahmsweise A_1 enthalten kann, so geht die Involution, zu der CC_2 gehört, an der Grenze in eine solche mit zwei endlich von einander entfernten Gruppen über. Daher mufs (§ 36a) CC_2 aus n von einander verschiedenen Punkten bestehen, von denen $p-1$ bei A_1 liegen.

Ist AA_1A_2 ein $(n+1)$facher Punkt, so besteht (§ 48) höchstens noch eine Gruppe nur aus einem $(n+1)$fachen Punkte. Daher mufs es Gruppen geben, die (wenigstens zwei) verschiedene Punkte bei A_1, sonst aber überhaupt keine Punkte besitzen. Dafs sie in Wahrheit $n+1$ verschiedene Punkte bei A_1 haben, soll später gezeigt werden.

Durch die vorstehenden Überlegungen ist dargethan, dafs es in jeder beliebigen Involution unendlich viele reguläre Gruppen giebt.

§ 53. Höchstens $2n$ Gruppen einer Strahleninvolution $(n+1)$ter Ordnung gehören Strahlenpaare an, welche in zwei projectivischen Strahlbüscheln desselben Trägers, ohne zusammenzufallen, einander zugehören. In einer Involution giebt es n bestimmte derartige Paare, wenn sie einen $(n+1)$fachen Strahl als Gruppe hat, der mit einem Doppelstrahl der beiden Büschel zusammenfällt.

Wir betrachten, das Centrum wieder imaginär vorausgesetzt, statt der Involution und der beiden Strahlbüschel das Involutionsfeld und die

Punktfelder. Es seien D_1, D_2 die Doppelpunkte, A_λ und A'_λ entsprechende Punkte, B und B' entsprechende Gruppen derselben. Aus der Involution AA_1A_2, BB_1B_2 $(n+1)$ter Ordnung entsteht die projectivische $A'A'_1A'_2$, $B'B'_1B'_2$ (§ 51), die aufser D_1 und D_2, welche nothwendig entsprechenden Gruppen gemeinsam sind, noch höchstens $2n$ Coincidenzpunkte haben (§ 50). Diese letzteren, und keine anderen gehören mit ihren entsprechenden des ersten Feldes paarweise derselben Involutionsgruppe an. Enthält die Involution bei D_1 einen $(n+1)$fachen Punkt D_1^{n+1}, so sind alle $2n+2$ Punkte den Reihen

$$D_1^{n+1}, AA_1A_2, \ldots \barwedge D_1^{n+1}, A'A'_1A'_2, \ldots$$

gemeinsam, aber auch (§ 49) den Reihen

$$D_1^{n+1}, D_1AA_1, \ldots \barwedge D_1^{n}A_2, A'A'_1A'_2, \ldots,$$

oder, wenn man links einmal von D_1 absieht, den Reihen

$$D_1^{n}, AA_1, \ldots \barwedge D_1^{n}A_2, A'A'_1A'_2, \ldots$$

Durch wiederholte Anwendung des § 49 ergiebt sich, dafs die Punkte aufserhalb D_1 den Reihen

$$A'A'_1, AA_1, \ldots \dot{\barwedge} A_2, A'_2, \ldots$$

gleichzeitig angehören. Unter ihnen findet sich aber noch D_2, und der Aufgabe genügen daher nur die bestimmten n Punkte der Ebene, welche D_2 zu einer Gruppe der Involution $AA_1A_2, A'A'_1A'_2$ ergänzen. Wir nennen diese Punkte $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$, ihre Gruppe ZZ_1.

§ 54. In einem Involutionsfelde $(n+1)$ter Ordnung mit einem $(n+1)$fachen Punkte giebt es im Allgemeinen und höchstens n verschiedene Punkte, in deren beliebiger Nähe zwei derselben Gruppe angehörige Punkte liegen.

Es sei $B_1B'_1$ ein solches Paar und

$$D_1A_1B_1D_2 \barwedge D_1A'_1B'_1D_2 .$$

B'_1 gehört dann der Gruppe $Z'Z'_1$ der Punkte an, die mit ihren entsprechenden der ersten Reihe in dieselbe Involutionsgruppe gehören. Je näher B_1 und B'_1 bei einander liegen, desto näher rücken auch A_1 und A'_1 einander (§ 16, 2). Jede Involution $(n+1)$ter Ordnung enthält (§ 52) Gruppen von $n+1$ verschiedenen Punkten; AA_1A_2 sei eine solche. Aus AA_1A_2 und $A'A'_1A'_2$ bestimmt man die zu D_2 gehörige Ergänzungsgruppe, indem man

$A'A_1, AA_1 \barwedge A_2A_2'$ [illegible] D^{n+1}

zuerst die Gruppe $D_2\mathfrak{D}'$ der Involution $AA_1, A'A'_1$ aufsucht, alsdann die Gruppe $\mathfrak{E}'$ der Involution $A, \mathfrak{D}'$ bestimmt, der A'_1 angehört. Ist dann $D_2\mathfrak{E}'_1$ die durch D_2 bestimmte Gruppe der Involution $A_1A_2, A'_1A'_2$, so sind nach § 43 die gesuchten Punkte den Reihen

1) $$A\mathfrak{D}'\mathfrak{E}' \ldots \barwedge A'_2A'_1\mathfrak{E}'_1 \ldots$$

gemeinsam. Wenn nun A'_1 an A_1 heranrückt, so nähern sich $\mathfrak{D}', \mathfrak{E}', \mathfrak{E}'_1$ bestimmten Grenz-Gruppen und -Lagen. Denn $\mathfrak{D}'$ hat dieselbe Bedeutung für die Involution D_1^n, AA_1, wie die gesuchte Gruppe für D_1^{n+1}, AA_1A_2; sie nähert sich daher einer Gruppe $\mathfrak{D}$ von $n-1$ Punkten, in der jeder Doppelpunkt von D_1^n, AA_1 einfach, jeder $p$fache Punkt derselben aber $(p-1)$fach vorkommt. Da AA_1 aus n verschiedenen Punkten besteht, so kommt A_1 in $\mathfrak{D}$ nicht vor. $\mathfrak{E}'$ nähert sich der durch A_1 bestimmten Gruppe $\mathfrak{E}$ der Involution $A, \mathfrak{D}$. Der Punkt $\mathfrak{E}'_1$ endlich, da er für D_1^2, A_1A_2 dieselbe Bedeutung hat, wie die untersuchte Gruppe für D_1^{n+1}, AA_1A_2, nähert sich dem zweiten Doppelpunkt $\mathfrak{E}_1$ der Involution D_1^2, A_1A_2. Die untersuchte Gruppe liegt der Coincidenzgruppe der Reihen

2) $$A\mathfrak{D}\mathfrak{E} \ldots \barwedge A_2A_1\mathfrak{E}_1 \ldots$$

nahe. Denn setzt man

3) $$A\mathfrak{D}'\mathfrak{E}' \ldots \barwedge A\mathfrak{D}\mathfrak{E} \ldots$$

und folglich auch

4) $$A_2A'_1\mathfrak{E}'_1 \ldots \barwedge A_2A_1\mathfrak{E}_1 \ldots,$$

so liegen je zwei entsprechende Gruppen der beiden Reihen 3) und auch zwei entsprechende Punkte der Reihen 4) einander nahe (§§ 39 u. 16, 2). Bei einem Coincidenzpunkte P der Reihen 1) liegen daher zwei benachbarte Punkte P' und P'', so dafs P'' in der Gruppe liegt, welche P' durch 2) zugeordnet wird. Beide Punkte können sich also, weil diese Reihen stetig auf einander bezogen sind (§ 35), nur in der Nähe eines Coincidenzpunktes derselben befinden, und dasselbe ist daher mit P der Fall. Es sei nun $Z_1Z_2 \ldots Z_n$ die den Reihen 2 gemeinsame Gruppe. Nach § 39 liegt $Z_1Z'_2 \ldots Z'_n$ derselben in der Art nahe, dafs bei einem $p$fachen Punkt der ersteren p verschiedene oder theils zusammenfallende Punkte der letzteren liegen. Die Punkte $Z_1Z_2 \ldots Z_n$ allein genügen daher der gestellten Aufgabe.

§ 55. In einem beliebigen Involutionsfeld $(n+1)$ter Ordnung giebt es höchstens $2n$ Stellen, in deren Nähe sich Punktepaare finden, die derselben Involutionsgruppe angehören.

Es sei $B_1 B_1'$ ein solches Paar; man setze alsdann

$$D_1 A_1 B_1 D_2 \;\overline{\wedge}\; D_1 A_1' B_1' D_2 \,.$$

Nach den Entwickelungen und Bezeichnungen des § 53 kommt dann B_1' unter den von D_1 und D_2 verschiedenen Coincidenzpunkten der beiden Reihen

$$A A_1 A_2 \,, B B_1 B_2 \ldots \;\overline{\wedge}\; A' A_1' A_2' \,, B' B_1' B_2' \ldots \qquad 1)$$

vor, oder auch unter denen von zwei bestimmten Reihen (§ 49)

$$A A_1 A_2 \,, A' A_1' A_2' \ldots \;\overline{\wedge}\; B B_1 B_2 \,, B' B_1' B_2' \ldots \,, \qquad 2)$$

denen ebenfalls D_1 und D_2 entsprechend gemeinsam sind.

Es seien $D_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}'$ und $D_2 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}''$ Gruppen von $A A_1 A_2$, $A' A_1' A_2'$, und $D_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}'$ und $D_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}''$ Gruppen von $B B_1 B_2$, $B' B_1' B_2'$. Es seien ferner $A_2 E$ und $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}'''$ Gruppen von $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}', \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}''$; die letztere aber so gewählt, daſs

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}' \,, A_2 E \,, \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}'' \,, \mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}''' \,, \ldots \;\overline{\wedge}\; D_2 \,, A_2 \,, D_1 \,, D_3 \,, \ldots \qquad 3)$$

ist. Entsprechend sei

$$\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}' \,, B_2 F \,, \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}'' \,, \mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}''' \,, \ldots \;\overline{\wedge}\; D_2 \,, B_2 \,, D_1 \,, D_3 \,, \ldots \qquad 4)$$

Die auſser D_1 und D_2 etwa vorhandenen Punkte betrachteter Art sind den Reihen

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}' \,, \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}'' \,, \mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}''' \ldots \;\overline{\wedge}\; \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}' \,, \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}'' \,, \mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}''' \ldots \qquad 5)$$

entsprechend gemein. Denn jedenfalls entstehen zwei zusammengehörige Gruppen der ursprünglichen Involutionen 2), wenn man auf die Reihen 5) zwei projectivische $D_2, D_1 \ldots$ bezieht. Den entsprechenden Gruppen $\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}_\lambda \mathfrak{B}^{(\lambda)}$ muſs D_1 resp. D_2 zugeordnet werden, wenn $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}' D_1$ und $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}' D_1$ resp. $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}'' D_2$ und $\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}'' D_2$ entstehen sollen. Es muſs ihnen aber, wie aus 3) und 4) hervorgeht, auch derselbe Punkt D_λ zugeordnet werden, wenn die entsprechenden Gruppen $A A_1 A_2$ und $B B_1 B_2$ entstehen sollen. Mithin sind die charakteristischen Felder, welche den Gruppen $\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}_\lambda \mathfrak{B}^{(\lambda)}$ für die beiden projectivischen Reihen 2) zugehören, identisch, und man erhält überhaupt zwei entsprechende Gruppen von 2), wenn man auf die beiden Felder 5) dieselbe Punktebene $D_2, D_1 \ldots$ projectivisch bezieht. Sollte nun $\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}_\lambda \mathfrak{B}^{(\lambda)}$ ein Punkt P

gemeinsam sein, so ist P auch denjenigen beiden entsprechenden Gruppen von 2) gemeinsam, die aus den Beziehungen

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}', \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}'', \mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}^{(\lambda)}, \ldots \barwedge D_2, D_1, P, \ldots$$

und

$$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}', \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}'', \mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{B}^{(\lambda)}, \ldots \barwedge D_2, D_1, P, \ldots$$

entstehen. Ist umgekehrt P zwei entsprechenden Gruppen der Reihen 2) gemeinsam, so kann man sie in der vorstehenden Form darstellen, und es mufs dann $\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ auch derselbe Punkt zugeordnet werden, damit A_2A_1A und B_2B_1B entstehen; daher entsprechen $\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ einander in 5).

Wenn nun A_1' und A_1 einander genähert werden, so rücken (§ 54) $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}''$ bestimmten Gruppen X_1X' und X_2X'' nahe; A_2E nähert sich der Gruppe A_2X der Involution X_1X', X_2X''; $\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3'$ nähert sich der bestimmten aus

$$X_1X', A_2X, X_2X'', X_3X''' \barwedge D_2, A_2, D_1, D_3$$

hervorgehenden Gruppe X_3X''' (§ 39). Die Gruppen $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}', \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}'', \mathfrak{B}_3\mathfrak{B}'''$ nähern sich entsprechend zu bestimmenden Gruppen Y_1Y', Y_2Y'', Y_3Y''' einer Involution. Setzt man jetzt

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}', \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}'', \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}''', \mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}^{(\lambda)} \ldots \barwedge X_1X', X_2X'', X_3X''', X_\lambda X^{(\lambda)} \ldots$$

und andererseits

$$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}', \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}'', \mathfrak{B}_3\mathfrak{B}''', \mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{B}^{(\lambda)} \ldots \barwedge Y_1Y', Y_2Y'', Y_3Y''', Y_\lambda Y^{(\lambda)} \ldots,$$

so nähern auch $\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ sich den Gruppen $X_\lambda X^{(\lambda)}$ und $Y_\lambda Y^{(\lambda)}$ in beliebigem Grade, sobald man A_1' an A_1 genügend heranrückt. Enthalten nun $\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ einen gemeinsamen Punkt P, so findet in $X_\lambda X^{(\lambda)}$ und $Y_\lambda Y^{(\lambda)}$ sich je ein jenem naher Punkt P' resp. P''. Dieselben rücken einander um so näher, je weiter A_1' an A_1 herangetrieben wird. Da aber an dieser Veränderung die projectivischen Reihen X_1X', $X_2X'', X_\lambda X^{(\lambda)} \ldots$ und $Y_1Y', Y_2Y'', Y_\lambda Y^{(\lambda)} \ldots$ nicht Theil nehmen, so finden sich etwa mögliche Paare $P'P''$ jedenfalls nur bei Doppelpunkten dieser Felder, deren Zahl nicht gröfser als $2n$ sein kann (§ 50). Damit ist der aufgestellte Satz bewiesen.

§ 56. Eine Involution $(n+1)$ter Ordnung besitzt höchstens $2n$ Doppelpunkte, ein etwa vorhandener $p$facher Punkt vertritt $p-1$ ge-

trennte Doppelpunkte. Ist ein $(n+1)$facher Punkt vorhanden, so giebt es aufserdem noch n Doppelpunkte, wenn man in einem $p$fachen Punkte des Feldes $p-1$ Doppelpunkte vereinigt denkt.

Nach § 52 giebt es in jeder Nähe eines mehrfachen Punktes Punktepaare, die einer und derselben Gruppe angehören. Dieselben finden sich aber nur bei höchstens $2n$ (§ 55) und im zweiten Falle bei n Punkten (§ 54). Diese Punkte allein sind daher die Doppel- oder mehrfachen Punkte der Involution.

Ist AA_1A_2 irgend eine Gruppe einer Involution mit $(n+1)$fachen Punkte D_1, so sucht man (§ 54) zuerst die Doppelpunktsgruppe Z' der Involution AA_1, D_1^n auf; die gesuchte Gruppe ZZ_1 gehört dann der Involution AA_1, A_2Z' an. Enthält AA_1 einen $p$fachen Punkt D_p, daneben noch die Gruppe $(G)^{n-p}$ von $n-p$ Punkten, so kommt D_p $(p-1)$fach in Z oder $D_p^{p-1}(G_1)^{n-p}$ vor. Die etwa vorhandenen Doppelpunkte bilden ein Glied der Involution $(n-p+1)$ter Ordnung $D_p\,(G)^{n-p}, A_2(G_1)^{n-p}$. Da nur eines der zwei gegebenen Glieder D_p enthält, so kommt unter den übrigen singulären Punkten D_p nicht mehr vor, welcher also $p-1$ gewöhnliche Doppelpunkte auch für die Involution $(n+1)$ter Ordnung vertritt.

Um zu zeigen, dafs l zusammen auftretende $p_1, p_2, p_3, \ldots p_l$fache singuläre Punkte $p_1+p_2+\ldots p_l-l$ gewöhnliche Doppelpunkte vertreten, ersetze man AA_1 durch andere nahe Gruppen $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1'', \mathfrak{A}'''\mathfrak{A}_1'''; \ldots$ von D_1^n, AA_1. Alsdann wird B_2 durch Gruppen $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}_1', \mathfrak{B}''\mathfrak{B}_1'', \mathfrak{B}'''\mathfrak{B}_1''' \ldots$ der zur vorigen projectivischen Involution D_1^n, BB_1 zu Gliedern der Involutionen

$$D_1^{n+1}, AA_1A_2 \;;\; D_1^{n+1}, \mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'A_2 \;;\; D_1^{n+1}, \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1''A_2; \ldots$$

ergänzt. Wenn nämlich $B_2\mathfrak{D}$ ein Glied von D_1^n, AA_1' ist, so erhalten wir $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}_1'$ als Coincidenzgruppe der Reihen

$$D_1^n, \mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1', B_2\mathfrak{D}, \ldots \;\overline{\wedge}\; A_2, D_1, B_2, \ldots$$

Es entstehen dabei aber projectivisch zu $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'$ Glieder der Involution $D_1^n, A_2\mathfrak{D}$ (§ 47).

Indem man den Grenzübergang des § 54 wiederholt, kann man einsehen, dafs die Doppelpunktsgruppen der so entstehenden Involutionen $(n+1)$ter Ordnung alle zu einer Involution $n$ter Ordnung $(ZZ_1, Z'Z_1', Z''Z_1'', Z'''Z_1''')$ gehören. Mit Ausnahme einzelner bestehen dieselben also

aus je n von einander verschiedenen Punkten. Wenn noch $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'$ genügend nahe bei AA_1 liegt, so rücken die n verschiedenen Punkte von $Z'Z_1'$ den n Punkten von ZZ_1 nahe. Aus dem Vorangegangenen folgt aber, dafs die erstere Gruppe zur Involution

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1', D_p^{p-1}(G_1)^{n-p}A_2$$

gehören mufs, denn $D_p^{p-1}(G_1)^{n-p}$ ist von der Involution $D_1^n, \mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1', AA_1$ die Doppelpunktsgruppe. Nun liegen aber p Punkte von $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'$ bei D_p (§§ 36a und 52). Die Gruppe $(G_2)^{n-p}$ der übrigen nähert sich dem Gliede $(G)^{n-p}$, das AA_1 neben dem $p$fach zählenden D_p noch enthält. Daher müssen (§ 36a) $p-1$ Punkte von $Z'Z_1'$ bei D_p liegen, die $n-p+1$ übrigen aber liegen einem dritten Gliede von $A_2(G_1)^{n-p}, D_p(G)^{n-p}$ nahe und sind daher von D_p endlich entfernt. Sind l Punkte vorhanden, die in ihren Gruppen $p_1, p_2, p_3, \ldots p_l$ fach zählen, so legen sich $p_1-1, p_2-1, \ldots p_l-1$ der n verschiedenen Punkte $Z'Z_1'$ neben sie; es ist sonach

$$p_1+p_2+p_3\ldots p_l = n+l\,.$$

Die einzelnen Punkte können daher als Vertreter von $p_1-1, p_2-1, \ldots$ endlich von p_l-1 gewöhnlichen Doppelpunkten angesehen werden.

Ein ähnlicher Satz gilt für die allgemeine Involution, ohne doch schon hier bewiesen werden zu können. Dafs neben einem $p_1$fachen und einem $p_2$fachen singulären Punkte nicht mehr als $2n-p_1-p_2+2$ andere in einer Involution auftreten können, folgt, wenn man beim Grenzübergange im § 55 D_1 und D_2 mit diesen Punkten zusammenfallen läfst.

Es ist nunmehr selbstverständlich, dafs es reguläre Gruppen in der Nähe jeder singulären geben mufs.

§§ 57—64. Eine Involution $n$ter Ordnung $AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ hat mit dem projectivischen Gebilde $B_2, A_2, \mathfrak{C}_2$ desselben Trägers, wenn man von höchstens $2n$ Speciallagen von $\mathfrak{C}_2$ absieht, $n+1$ gemeinsame Elemente C, C_1, C_2.

§ 57. Wir beschränken uns auch hier auf den Fall eines Strahlbüschels mit unendlich fernem Centrum A, dem die Bezeichnungen ja schon angepafst sind. Die $n+1$ Punkte bilden, wenn sie vorhanden sind, eine Gruppe der Involution AA_1A_2, BB_1B_2. Wird $\mathfrak{C}_2$ projectivisch zu dem

Punkte $\mathfrak{E}_0$ der Ebene B bewegt, so wird behauptet, daſs nicht nur jeder Gruppe der Involution ein Punkt der Ebene B, sondern auch jedem Punkte von B eine Gruppe der Involution entspricht. Sind DD_1D_2 und EE_1E_2 irgend zwei andere Gruppen, so kann man die Involution auch aus den Beziehungen

$$DD_1 , EE_1 , \mathfrak{F}'\mathfrak{F}'_1 , \ldots \;\overline{\wedge}\; E_2 , D_2 , \mathfrak{F}_2 \ldots$$

entstehen lassen. Wenn $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{E}_2$ einander richtig projectivisch entsprechen, so bestimmen irgend zwei Reihenpaare der ersten, und die entsprechenden der zweiten Art entweder dieselben oder beide keine gemeinsamen Punkte. Die erste Aufgabe kann daher durch die zweite vertreten, oder über AA_1A_2 und BB_1B_2 vorausgesetzt werden, daſs sie aus je $n+1$ verschiedenen Punkten bestehen. Ferner soll kein Punkt der einen mit allen der anderen in einer Kette der Punktebene A liegen, wenn es auch Involutionen giebt (§ 48), bei denen je die $n+1$ Punkte einer Gruppe einer Kette der Punktebene A angehören.

§ 58. Entsprechen die Gruppen AA_1A_2 und BB_1B_2 den Punkten $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ der Ebene B, so liegen alle Gruppen, welche Punkten einer beliebigen Halbkette $\mathfrak{A}_0 , \mathfrak{B}_0$ etwa zugehören können, auf dem Erzeugniſs zweier projectivischer Halbkettenbüschel $AA_1 , BB_1 \;\overline{\wedge}\; B_2 , A_2$. Die $2n+2$ Tangentenbüschel sind so unter einander reell-projectivisch, daſs den von A , A_1 , B_2 nach A führenden Strahlen die von B , B_1 , A_2 nach A[1] führenden Strahlen entsprechen.

Der veränderliche Punkt $\mathfrak{E}_2$, welcher der festen Gruppe $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1$ zugeordnet werden muſs, damit die gesuchten Involutionsgruppen entstehen, bewegt sich mit dem Punkte $\mathfrak{E}_0$ der Ebene B projectivisch und durchläuft eine Halbkette, wenn dieser die Halbkette $\mathfrak{A}_0 , \mathfrak{B}_0$ durchläuft. Aber jenen Endpunkten $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ entsprechen A_2 und B_2. Diese nämlich müssen $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1$ zugeordnet werden, damit AA_1A_2 und BB_1B_2 entstehen. Also gehört für die besonderen Punkte von B der Halbkette $AA_1 , \mathfrak{E}\mathfrak{E}_1 , BB_1$ die bestimmte Halbkette $B_2 , \mathfrak{E}_2 , A_2$ zu. Weil nun für die Erzeugung jeder Gruppe AA_1 und B_2, sowie BB_1 und A_2 einander entsprechen, so gehört auch jeder anderen Halbkette AA_1 , BB_1 eine bestimmte B_2 , A_2 zu. In den Tangentenbüscheln in A , A_1 und B_2 gehören die nach A führenden Strahlen einander zu. Die den beiden Reihen

$$AA_1\,, BB_1\,, \mathfrak{E}\mathfrak{E}_1 \ldots \barwedge B_2\,, A_2\,, \mathfrak{E}_2 \ldots$$

etwa gemeinsamen Punkte müssen dem Erzeugnifs der beiden Halbkettenbüschel angehören.

§ 59. Wenn D_2 ein einfacher Punkt seiner Gruppe ist, so kann bei passender Bezeichnung der Gruppen $AA_1A_2\,, BB_1B_2$ die Halbkette $AA_1\,, D_2\,, BB_1$ weder bei D_2 einen mehrfachen Punkt, noch auch dieselbe Tangente wie $B_2\,, D_2\,, A_2$ haben.

DD_1 und $\mathfrak{D}$ mögen D_2 zu Gruppen der Involutionen AA_1A_2, BB_1B_2 und $AA_1\,, BB_1$ ergänzen. DD_1D_2 ist die Coincidenzgruppe der Reihen

$$AA_1\,, \mathfrak{D}D_2\,, BB_1 \ldots \barwedge B_2\,, D_2\,, A_2 \ldots$$

Man halte B_2 und D_2 fest und bewege A_2 über die ganze Kette B_2, D_2, A_2. Alle diese Reihen haben aufser D_2 noch Gruppen der Involution $AA_1\,, \mathfrak{D}B_2$ gemeinsam, die einer Kette ihres Involutionsfeldes angehören. Sie entsteht, indem man die Kettenbüschel I) $AA_1, \mathfrak{D}D_2$ und II) B_2, D_2 so projectivisch auf einander bezieht, dafs in den Tangentenbüscheln in den Punkten der Gruppe $\mathfrak{D}D_2$ und in D_2 die nach A führenden Strahlen einander zugehören. Von den Punkten BB_1 kann die Kette nur die enthalten, welche gleichzeitig auch der $AA_1\,, \mathfrak{D}D_2\,, BB_1$ entsprechenden Kette $B_2\,, D_2\,, A_2$ angehören.

Die Curven $AA_1\,, \mathfrak{D}D_2$ entstehen nun, wenn man auf eine feste Anordnung III der Ketten $A\,, \mathfrak{D}$ die Büschel $\mathrm{III}_1\,, \mathrm{III}_2\,, \mathrm{III}_3 \ldots$ von Ketten $D_2\,, A_1$ projectivisch so bezieht, dafs in den Tangentenbüscheln in A und D_2 die nach A führenden Strahlen einander entsprechen. Alle Tangentenbüschel in D_2 der $\mathrm{III}_1\,, \mathrm{III}_2\,, \mathrm{III}_3, \ldots$ sind also unter sich projectivisch und haben die Strahlen $D_1\mathrm{A}$ und $D_1\mathrm{A}^1$ entsprechend gemein. Die Reihen gleichstelliger Tangenten sind daher (§ 19, Beispiel) in derselben Weise projectivisch und ergeben neue Reihen $\mathrm{III}'_1\,, \mathrm{III}'_2\,, \mathrm{III}'_3 \ldots \mathrm{III}'_{\mathfrak{s}}$ der Ketten $D_2\,, A_1$. Die Ketten irgend einer Reihe $\mathrm{III}'_{\mathfrak{s}}$ müssen einer festen Kette des Büschels $A\,, \mathfrak{D}$ nach und nach zugeordnet werden, damit die vorgegebene Anordnung der Curven $AA_1, D_2\mathfrak{D}$ sich ergiebt. Eine von den Reihen gehört zu der Curve $A, D_2, \mathfrak{D}$ und zeigt daher in D_2 das Tangentenbüschel des Kettenbüschels $AA_1\,, \mathfrak{D}D_2$, falls D_2 in $\mathfrak{D}D_2$ nur einfach, in $\mathfrak{D}$ also nicht mehr vorkommt. Diese und folglich jede andere Reihe III' ist mithin auch zu der einen Reihe II von Ketten $D_2\,, B_2$ so projectivisch, dafs

in den Tangentenbüscheln in D_2 die Strahlen $D_2\mathsf{A}$ und $D_2\mathsf{A}^1$ sich selbst entsprechen. III'_β schneidet sich mit II in einer Kette A_1, B_2. Eine solche nämlich erzeugen zwei projectivische Strahlbüschel A_1 und B_2, in denen $A_1\mathsf{A}$ und $B_2\mathsf{A}$ einander entsprechen (§ 4). Setzt man jetzt $\mathfrak{a}$ und $\mathsf{A}D_2$ in zwei projectivischen Strahlbüscheln mit dem Centrum A einander, $\mathsf{A}A_1$ und $\mathsf{A}B_2$ aber sich selbst entsprechend, so geht die erzeugte Kette A_1, B_2 in eine andere A_1, B_2 über. Sie wird durch zwei projectivische Kettenbüschel A_1, D_2 und B_2, D_2 erzeugt (§ 15), deren Tangentenbüschel in D_2 zu den beiden Strahlbüscheln bezüglich $\mathfrak{a}$ perspectivisch sind, und in denen daher $D_2\mathsf{A}$ und $D_2\mathsf{A}^1$ sich selbst entsprechen. Die neue Kette A_1, B_2 geht durch D_2, wenn die beiden Strahlbüschel A_1 und B_2 das Geradenpaar $A_1B_2, \mathfrak{a}$ erzeugten, also beide hinsichtlich $\mathfrak{a}$ perspectivisch waren. Die Tangentenbüschel in D_2 der Kettenbüschel D_2, A_1 und D_2, B_2, welche A_1, D_2, B_2 erzeugen, stimmen mithin überein. Dieser letztere Kegelschnitt kann also nur dann der besonderen Kette $A, D_2, \mathfrak{D}$ zugehören, wenn das Büschel $AA_1, \mathfrak{D}D_2$ bei D_2 dasselbe Tangentenbüschel hat, wie D_2, B_2, oder nur dann, wenn AA_1, D_2, BB_1 und B_2, D_2, A_2 einander berühren.

Mit der Kette $A, \mathfrak{D}$ ändert sich das Kettenbüschel III', welches der festen Anordnung II der Ketten D_2, B_2 zugeordnet wird. Einer festen Kette der letzteren Reihe werden dabei die Ketten D_2, A_1 in einer der Anordnungen III_α, welche zum Büschel $A, \mathfrak{D}$ projectivisch sind, zugeordnet. Eine der Reihen III_α, deren Curven der Kette B_2, A_1, D_2 zugeordnet werden, liefert in A_1 das Tangentenbüschel der Reihe IV der Ketten A_1, B_2. Das Tangentenbüschel ist daher auf die $n-1$ Tangentenbüschel in A von $A, \mathfrak{D}$ so bezogen, daſs der von A_1 nach A^1 und die $n-1$ von den Punkten A nach A führenden Strahlen einander zugehören. Denn es entsprechen in den projectivischen Tangentenbüscheln in A der Ketten III und dem Tangentenbüschel von III_α in D_2 die nach A führenden Strahlen einander; in den Tangentenbüscheln in D_2 und A_1 des letzteren Büschels aber gehören $D_2\mathsf{A}$ und $A_1\mathsf{A}^1$ einander zu. Die beiden Kettenbüschel $A, \mathfrak{D}$ (III) und B_2, A_1 (IV) sind daher so projectivisch, daſs in den n Tangentenbüscheln in A und B_2 die nach A führenden Strahlen einander zugehören. Sie erzeugen also eine Kette $AA_1, \mathfrak{D}B_2$, auf der die gesuchte Gruppe DD_1 sich befindet. Sie enthält den Punkt D_2 selbstverständlich, wenn er noch in $\mathfrak{D}$ vorkommt, mithin AA_1, D_2, BB_1 in D_2 eine Verzweigung hat.

Aufserdem gehört D_2 nur dann der Kette an, wenn AA_1, D_2, BB_1 und B_2, D_2, A_2 in D_2 dieselbe Tangente haben; nur dann entsprechen nämlich die Ketten $A, D_2, \mathfrak{D}$ und B_2, D_2, A_1 von III und IV einander.

Die Kette B_2, D_2, A_2 kann nicht alle Punkte von BB_1 enthalten, da sonst A_2 nicht auf ihr liegen könnte. Ist B_1 nicht auf ihr und folglich auch nicht auf der bereits gewonnenen Kette $AA_1, \mathfrak{D}B_2, DD_1$ gelegen, so erhalten wir eine zweite Kette $AA_1, \mathfrak{D}'B_1, DD_1$, wo $\mathfrak{D}'D_2$ eine Gruppe der Involution AA_1, BB_2 ist. Diese Kette mufs D_2 enthalten, wenn $AA_1, \mathfrak{D}D_2, BB_2$ bei D_2 entweder eine Verzweigung oder eine Berührung mit $B_1D_2A_2$ hat. Beide Ketten $AA_1, \mathfrak{D}B_2, DD_1$ und $AA_1, \mathfrak{D}'B_1, DD_1$ haben, als demselben Involutionsfelde AA_1, DD_1 angehörig, aufser AA_1 nur die Gruppe DD_1 gemeinsam. Wissen wir, dafs D_2 kein mehrfacher Punkt seiner Gruppe DD_1D_2 ist, so darf eine von beiden den Punkt D_2 nicht enthalten. Wenn wir die Bezeichnung der Gruppen AA_1A_2 und BB_1B_2 richtig wählen, wird AA_1, D_2, BB_1 weder bei D_2 eine Verzweigung noch eine Berührung mit B_2, D_2, A_2 haben, wie es der Satz behauptet.

§ 60. Jede Halbkette $A_1A_2 \ldots A_{n+1}, B_1B_2 \ldots B_{n+1}$ oder AA_1A_2, BB_1B_2 besteht, neben etwaigen geschlossenen, aus $n+1$ getrennten ungeschlossenen Zügen (Ranken), welche die $2n+2$ Punkte A_λ, B_μ unter einander verbinden. Die verschiedenen Halbketten $A_1A_2 \ldots A_{n+1}, B_1B_2 \ldots B_{n+1}$ schliefsen sich stetig an einander.

Da je nur eine Halbkette AA_1, BB_1 und A_2, B_2 unendlich ferne Punkte enthält, giebt es auch nur eine derartige im Büschel $A_1A_2 \ldots A_{n+1}, B_1B_2 \ldots B_{n+1}$, denn erstere müssen, wenn sie sich ergeben soll, einander entsprechen. Aufser dieser schliefsen wir noch die höchstens $2n$ Halbketten aus, auf denen singuläre Gruppen liegen. Es sei D_2 ein beliebiger Punkt einer der übrigen. Dann kann man (§§ 37 und 59) aus den Gruppen AA_1A_2 und BB_1B_2 je zwei Punkte A_{i_1}, A_{i_2} resp. B_{i_1}, B_{i_2} so aussondern, dafs die Halbkette $A^iA_{i_1}, D_2, B^iB_{i_1}$, wo A^i und B^i zusammenfassend je die übrigen $n-1$ Punkte bezeichnen, nach D_2 eine einfache Ranke A_{i_1}, D_2, B_{i_1} sendet, die in D_2 eine andere Tangente hat, als B_{i_2}, D_2, A_{i_2}. Beide Gebilde *schneiden* daher einander in D_2; zu *jeder* Seite der einen liegen bei D_2 Punkte der anderen. Halbketten, die nahe bei B_{i_2}, D_2, A_{i_2} liegen, entsprechen solche, die nahe bei AA_{i_1}, D_2, BB_{i_1} liegen. Wenn die An-

näherung genügend weit getrieben wird, enthalten diese je eine Ranke A_{i_1}, B_{i_1}, die A_{i_1}, D_2, B_{i_1} so nahe liegt, wie man nur immer will. Sie mufs mit ihrer entsprechenden Halbkette B_{i_2}, A_{i_2} in der Nähe von D_2, aber nur in einem Punkte, sich schneiden, weil die Tangenten in dem Schnittpunkte (§§ 39, 2 und 5) denen in D_2 nahe liegen, also verschieden von einander sein müssen. Die Ranken A_{i_1}, B_{i_1} eines schmalen A_{i_1}, D_2, B_{i_1} einschliefsenden Bandes schneiden das zu untersuchende Gebilde in je einem bei D_2 gelegenen Punkte. Dieser gehört also einem bestimmten unverzweigten Theile derselben an.

Alle Punkte A_λ, B_μ gehören der Halbkette AA_1A_2, BB_1B_2 an. Denn die Halbkette B_2, A_1, A_2 z. B. hat mit ihrer entsprechenden AA_1, BB_1 den Punkt A_1 nothwendig gemeinsam. Haben beide Curven in A_1 dieselbe Tangente, so kann man eine Zerlegung $A^iA_1A_{i_2}$ und $B^iB_{i_1}B_{i_2}$ der beiden Gruppen so finden, dafs B_{i_2}, A_1, A_{i_2}, eine andere Tangente in A_1 zeigt, als die entsprechende besondere Kette $A^iA_1, B^iB_{i_1}$, deren Halbtangente in A_1 zugleich der untersuchten Curve angehört. Die besondere Halbkette $A^iA_1, B^iB_{i_1}$ und alle ihr benachbarten haben die A_1 zunächst liegenden Theile auf der durch ihre Halbtangente bestimmten Seite der Kette B_{i_2}, A_1, A_{i_2}. Die entsprechenden Halbketten B_{i_2}, A_{i_2} liegen zum Theil auf dieser, zum Theil aber auf der anderen Seite von B_{i_2}, A_1, A_{i_2}. Die ersteren, aber nur diese, können ihre entsprechenden Gebilde in je einem Punkte schneiden, der beliebig nahe an A_1 heranrücken kann. A_1 und ebenso jeder andere Punkt A_λ oder B_μ ist daher Anfangs- oder Endpunkt eines Curvenbestandtheils.

Von irgend einem Curvenpunkt D_2 aus ist auf derselben ein continuirlicher Fortschritt nach beiden Seiten möglich. Man könnte dabei zunächst einem Punkte S sich unbegrenzt nähern, ohne ihn doch je zu erreichen. S mufs aber der Curve angehören. Entsprächen die Curven $A^iA_{i_1}, S, B^iB_{i_1}$ und B_{i_2}, S, A_{i_2} sich nicht, so würden die beiden zugehörigen Curven je des anderen Büschels von S endlich entfernt sein, und es läge daher auch in einer bestimmten Umgebung von S kein Curvenpunkt. Da man also nach dem bereits Erledigten auch über einen solchen Grenzpunkt fortschreiten könnte, giebt es derartige Punkte überhaupt nicht. Schreiten wir von irgend einem Punkte D_2 aus auf dem betreffenden Curventheil vorwärts, so müssen wir bei stetiger Bewegung entweder nach D_2

zurück oder zu einem der Punkte A_λ, B_μ gelangen. Die Curve kann daher aufser $n+1$ Ranken, welche die Punkte A_λ, B_μ unter einander verbinden, nur noch geschlossene Züge enthalten.

§ 61. Jede der $n+1$ Ranken des vorigen Satzes verbindet einen der Punkte A_λ mit einem Punkte B_μ.

Erster Nachweis. Angenommen, es sei eine Ranke A_{i_1}, A_{i_2} möglich. Irgend ein Punkt C_1 der Curve bestimmt eine Gruppe der Involution AA_1A_2, BB_1B_2, deren andere n Punkte (§ 58) auch der Curve angehören müssen. Läfst man C_1 von A_{i_1} aus auf der Ranke $A_{i_1}A_{i_2}$ sich stetig bewegen, so müssen die übrigen n Punkte $C_2, C_3, \ldots C_{n+1}$ sich von $A_{i_2}, A_{i_3}, \ldots A_{i_{n+1}}$ aus stetig bewegen (§ 52). C_2 bewegt sich von A_{i_2} aus auf der Ranke A_{i_1}, A_{i_2}, gleich C_1. Da beide in entgegengesetzter Richtung fortschreiten, so begegnen sie einander einmal und dieser Treffpunkt ist in seiner Gruppe ein Doppelpunkt. Da nun die Halbkette keine singulären Gruppen enthält, so wird die Annahme unstatthaft, es mufs also jede der $n+1$ Ranken einen der Punkte $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$ mit einem der Punkte $B_1, B_2, \ldots B_{n+1}$ verbinden.

§ 62. Zweiter Beweis für den Satz vom § 61.

Wir betrachten das ganze Halbkettenbüschel $A_1A_2\ldots A_{n+1}, B_1B_2 \ldots B_{n+1}$. Es entsteht, wenn man auf eine feste Anordnung des Büschels AA_1, BB_1 in allen möglichen Weisen das Halbkettenbüschel B_2, A_2 so bezieht, dafs in den reell-projectivischen Tangentenbüscheln die von A, A_1, B_2 nach A und die von B, B_1, A_2 nach A[1] führenden Strahlen einander entsprechen. Liegen in zwei Anordnungen II_α und II_β der Halbketten B_2, A_2 zwei entsprechende einander genügend nahe, so rücken je zwei andere entsprechende Ketten einander so nahe, als man nur immer will (§ 2a, Zusatz 2 und § 5). Daher liegen auch die Erzeugnisse von I mit II_α und II_β ihrer ganzen Ausdehnung nach einander nahe. Schneidet eine Curve AA_1, BB_1 ihre entsprechende aus II_α in D_2 und haben beide hier verschiedene Tangenten, so mufs die zugehörige Curve in II_β sie nahe bei D_2 schneiden. Für jede Erzeugungsweise der festen Halbkette AA_1A_2, BB_1B_2 ergiebt sich eine entsprechende der zweiten ihr genäherten. Da nun jene ohne Doppelpunkte ist, müssen in jedem ihrer Punkte P sich bei wenigstens

einer Erzeugungsweise die Halbketten $A'A_{i_1}$, P, $B'B_{i_1}$ und B_{i_2}, P, A_{i_2} schneiden, ohne die Tangenten gemeinsam zu haben. Folglich nähert jedem Punkte einer festen Halbkette $A_1 \dots A_{n+1}, B_1 \dots B_{n+1}$ ohne Doppelpunkt sich wenigstens ein Punkt einer zweiten, wenn man einem von den A_λ und B_μ verschiedenen Punkte der ersteren einen der zweiten Curve genügend nähert.

Da zwei verschiedene Reihen II_α und II_β keine gemeinsame Halbkette haben, so treffen zwei verschiedene Halbketten AA_1A_2, BB_1B_2 sich nur in den A_λ und B_μ. Die gleichstelligen Glieder der Reihen II ordnen sich (§ 19 Beispiel) zu neuen Reihen B_2, A_2 zusammen, in deren unter sich projectivischen Tangentenbüscheln in B_2 und A_2 die Strahlen $B_2\mathrm{A}^1$ und $A_2\mathrm{A}$ einander entsprechen. In diesen Anordnungen II'_α müssen die Halbketten B_2, A_2 bestimmten Halbketten AA_1, BB_1 zugeordnet werden, damit eine fest gegebene Anordnung der Halbketten AA_1A_2, BB_1B_2 entstehe. Die AA_1, A_2, BB_1 zugehörige Reihe II'_γ ergiebt die Tangentenreihe des Büschels AA_1A_2, BB_1B_2 in A_2 und die AA_1, B_2, BB_1 zugesellte Reihe diejenige in B_2. Diese sind daher so projectivisch, dafs die imaginären Strahlen $B_2\mathrm{A}^1$ und $A_2\mathrm{A}$ einander entsprechen. Da man A_2 mit jedem A_λ und B_2 mit jedem B_μ vertauschen kann, so sind die Tangentenbüschel in AA_1A_2 auf die in BB_1B_2 so reell-projectivisch bezogen, dafs den von ersteren nach A die von letzteren nach A^1 führenden Strahlen entsprechen. Jene bewegen sich mithin in einer, diese in der entgegengesetzten Richtung. Die Halbtangenten der einzelnen Halbketten des Büschels erhält man aus der vorigen Bestimmung unzweideutig, wenn man einen Satz zusammengehöriger kennt; denn die Halbtangentenbüschel sind nach der Stetigkeit, also so auf einander bezogen, dafs die Halbstrahlen von $2n+2$ gestreckten Winkeln in $A_1, \dots A_{n+1}, B_1, \dots B_{n+1}$ einander entsprechen. Da die untersuchte Curve nur aus getrennten Zügen besteht, so müssen von einer zweiten genügend genäherten Halbkette AA_1A_2, BB_1B_2 die einzelnen Züge den ihrigen nahe liegen, jeder Ranke der ersten eine dieselben Punkte verbindende der zweiten, jedem geschlossenen Zuge ein anderer. Wenn nun die Curve sich stetig in ihrem Büschel von der einen zur anderen Lage verändert, so durchmifst jede Ranke, sich stetig verändernd, den mondförmigen Raum zwischen ihrer Anfangs- und Endlage. Dabei müssen die Tangenten in den Endpunkten, wie es evident ist[20], sich nothwendig in entgegengesetz-

ten Richtungen drehen und es mufs also diese, wie jede andere Ranke einen der Punkte A_λ mit einem der Punkte B_μ verbinden.

§ 63. Eine involutorische Ebene

$$A_1 A_3 \ldots A_{n+1}, B_1 B_3 \ldots B_{n+1}, \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_3 \ldots \mathfrak{C}_{n+1}, \ldots$$

$n$ter Ordnung hat mit einer projectivischen Punktebene $B_2, A_2, \mathfrak{C}_2, \ldots$ stets Punkte gemeinsam und zwar, wenn man von höchstens $2n$ speciellen Lagen des Punktes $\mathfrak{C}_2$ absieht, $n+1$ verschiedene. Vorausgesetzt wird dabei, dafs $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ und $B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$ keinen Punkt gemeinsam haben.

Die nach der Behauptung vorhandenen Punkte bilden eine Gruppe $C C_1 C_2$ der Involution $A A_1 A_2, B B_1 B_2$. Diese Glieder können in ihr beliebig ausgewählt und daher den Festsetzungen des § 57 unterworfen werden. $C C_1 C_2$ liegt auf einer bestimmten Halbkette $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$, $B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$. Es seien zunächst die Halbketten des Büschels ausgeschlossen, welche singuläre Gruppen oder die unendlich ferne Gerade enthalten. $A_{i_1} B_{k_1}$ sei eine Ranke einer der regulären Halbketten. Die gesuchten Punkte sind dann auch den beiden Feldern

$$A^i A_{i_1}, B^k B_{k_1}, \mathfrak{C}' \mathfrak{C}_1' \ldots \barwedge B_{k_2} A_{i_2} \mathfrak{C}_2'$$

gemeinsam (§ 42). Jeder $A^{(i)} A_{i_1}$ und $B^{(k)} B_{k_1}$ beigeordneten Kette $A^i A_{i_1} \circ B^k B_{k_1}$ entspricht eine B_{k_2} und A_{i_2} beigeordnete. Zieht man durch einen beweglichen Punkt des Zweiges A_{i_1}, B_{i_1} jederzeit die Kette $A_{i_2} \circ B_{k_2}$, und sucht man zweitens zu der Kette $A^{(i)} A_{i_1} \circ B^{(k)} B_{k_1}$, die er bestimmt, die projectivisch zugehörige Kette $B_{k_2} \circ A_{i_2}$, so fallen beide nur für die gesuchten Punkte, welche auf der Ranke A_{i_1}, B_{k_1} liegen, zusammen. Beide Ketten bewegen sich aber stetig. Die erste kann, da die Ranke A_{i_1}, B_{k_1} weder A_{i_2} noch B_{k_2} enthält, n i c h t auf diese zusammenschrumpfen. Die zweite aber reducirt sich für die Anfangs- und Endlagen A_{i_1} und B_{k_1} auf die Punkte B_{k_2} und A_{i_2}. Daher werden beide Ketten nothwendig einmal identisch, und auf A_{i_1}, B_{k_1} liegt wenigstens einer der gesuchten Punkte. Ebenfalls liegt auf A_{i_2}, B_{k_2}; A_{i_3}, B_{k_3}; $\ldots A_{i_{n+1}}, B_{k_{n+1}}$ je ein Punkt. Da es ihrer aber (§ 43) höchstens $n+1$ giebt, so findet sich genau einer auf jeder einzelnen Ranke.

Liegt $\mathfrak{C}_2$ auf einer der ausgenommenen Halbketten B_2, A_2, so ziehen wir eine keinen der ausgezeichneten Punkte enthaltende Halbkette $A_2, \mathfrak{C}_2$, und wählen auf ihr sonst beliebig den Punkt $\mathfrak{D}_2$ so, dafs er keiner der

$2n+1$ ausgezeichneten Halbketten $B_2 \mathfrak{C}_2 A_2$ angehört. Dem Punkte $\mathfrak{D}_2$ gehört eine aus der Beziehung

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1 \ldots \barwedge B_2, A_2, \mathfrak{D}_2 \ldots$$

zu bestimmende Gruppe DD_1D_2 zu. Die $\mathfrak{C}_2$ entsprechende Gruppe findet sich dann auch aus der Beziehung:

$$AA_1, DD_1, \ldots \barwedge D_2, A_2, \ldots$$

Hiernach liegen die gesuchten Punkte auf einer regulären Halbkette AA_1A_2, DD_1D_2, und auf jeder Ranke findet sich einer von ihnen. Damit ist der Lehrsatz erwiesen.

§ 64. Ein involutorisches Feld

$$A_1 A_2 \ldots A_m, B_1 B_2 \ldots B_m, \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_m, \ldots$$

$m$ter Ordnung hat mit einem zu ihm projectivischen

$$B_{m+1} B_{m+2} \ldots B_{n+1}, A_{m+1} A_{m+2} \ldots A_{n+1}, \mathfrak{C}_{m+1} \ldots \mathfrak{C}_{n+1}, \ldots$$

mit demselben Grundpunkt stets Punkte, und wenn man von speciellen (höchstens $2n$) Lagen der Gruppe $\mathfrak{C}_{m+1} \ldots \mathfrak{C}_{n+1}$ absieht, genau $n+1$ Punkte gemeinsam. Vorausgesetzt wird dabei, dafs $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ und $B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$ keine gemeinsamen Punkte haben.

Der Satz folgt aus § 63 mittels § 42. Damit ist § 32 von n auf $n+1$ übertragen, wie es für die §§ 33, 34a, 34b, 35, 36a bereits in den §§ 47, 43, 56, 51, 52 geschehen war. Zur vollständigen Lösung der im zweiten Abschnitt gestellten Aufgabe sind nur noch die Lehrsätze 36b, 37, 38 und 39 zu bestätigen, von denen die ersteren die Beziehung eines involutorischen Feldes zu einem projectivischen Punktfeld behandeln, während der letztere sich mit der stetigen Veränderung eines involutorischen Feldes befafst.

§§ 65—70. Von den involutorischen Feldern.

§ 65. Die Gruppe eines involutorischen Feldes bewegt sich stetig mit dem entsprechenden Punkte einer zu ihr projectivischen Ebene.

Es mögen den Punkten $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1$ die Gruppen AA_1A_2 und BB_1B_2, den Punkten $\mathfrak{C}_1', \mathfrak{C}_1''$ aber die Coincidenzpunkte der Reihen

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1, \ldots \barwedge B_2, A_2, \mathfrak{C}_2', \ldots \qquad \text{I)}$$
$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1, \ldots \barwedge B_2, A_2, \mathfrak{C}_2'', \ldots \qquad \text{II)}$$

entsprechen, so ist (§ 47)

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1'\mathfrak{C}_1'' \barwedge A_2B_2\mathfrak{C}_2'\mathfrak{C}_2'' .$$

Also liegen (§ 16, Beweis) $\mathfrak{C}_2'', \mathfrak{C}_2'$ und $\mathfrak{C}_1'', \mathfrak{C}_1'$ gleichzeitig einander nahe. Einer vierten Gruppe $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ von AA_1, BB_1 gehören die durch die Beziehung

$$B_2, A_2, \mathfrak{C}_2', \mathfrak{D}_2' \barwedge AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}\mathfrak{D}_1 \barwedge B_2, A_2, \mathfrak{C}_2'', \mathfrak{D}_2''$$

bestimmten Punkte $\mathfrak{D}_2'$ und $\mathfrak{D}_2''$ zu. Letzterer liegt dem ersteren um so näher, je mehr $\mathfrak{C}_2''$ an $\mathfrak{C}_2'$ heranrückt. Umfafst $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ den Punkt $\mathfrak{D}_2''$, so liegt der ihm in der festen Beziehung I entsprechende Punkt jenem sehr nahe. Da nun die Involution $AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ stetig auf das Feld $B_2A_2\mathfrak{C}_2'$ desselben Grundpunktes bezogen ist, so liegt jeder Doppelpunkt der Reihen II um so näher bei einem solchen der Reihen I, je näher $\mathfrak{C}_2''$ an $\mathfrak{C}_2'$ und folglich $\mathfrak{C}_1''$ an $\mathfrak{C}_1'$ heranrückt.

Hat die zu I gehörige Gruppe die unendlich ferne Gerade als Bestandtheil, so beziehe man das Strahlbüschel A so projectivisch auf ein concentrisches, dafs dem Strahle a der andere AA_0 zugehört. Der durch II bestimmten Gruppe gehört dann ein Punkt A_0' an, der nahe bei A_0 liegt. In der eigentlich zu betrachtenden Ebene gehört $\mathfrak{C}_1''$ eine Gruppe mit theils sehr weit entfernten Punkten zu.

§ 66. Eine Halbkette besteht allein aus $n+1$ Ranken, die in gewisser Weise die Punkte $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$ mit den Punkten $B_1, B_2, \ldots B_{n+1}$ verbinden. Falls eine Gruppe mit einem $p$fachen Punkte auf ihr sich vorfindet, fliefsen p von ihnen zu einem $2p$-strahligen Sterne zusammen.

Falls die betrachtete Halbkette keinen mehrfachen Punkt enthält, müfsten die projectivischen Gebilde

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_1 \ldots \barwedge B_2, A_2, C_1 \ldots$$

wenn C_1 ein Punkt der Halbkette aufserhalb der $n+1$ Ranken wäre, $n+2$ gemeinsame Punkte haben (§ 62), was laut § 43 unmöglich ist. Daher besteht die Halbkette nur aus $n+1$ Zügen, welche die Punkte A, A_1, A_2 in bestimmter Weise mit denen B, B_1, B_2 verbinden. Enthält die Halbkette Gruppen, die einer solchen mit einem $p$fachen Punkt D_p nahe liegen, so müssen p von ihren Ranken sich D_p gleichzeitig nähern, denn auf p verschiedene Ranken vertheilen sich die p verschiedenen bei D_p ge-

legenen Punkte der Gruppe. Bei der D_p enthaltenden Curve fliefsen mithin p Ranken in einen $2p$-strahligen Stern zusammen mit dem Mittelpunkt in D_p. Liegen auf der Halbkette keine anderen singulären Gruppen, so können auch keine weiteren Begegnungen ihrer Ranken stattfinden. Da es in dem Halbkettenbüschel $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}, B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$ Halbketten giebt, die von verschiedenen Seiten her sich der ausgezeichneten Curve anschliefsen, und die aus je $n+1$ verschiedenen Ranken bestehen, so trennen die p Strahlen des Sterns, welche nach Punkten von AA_1A_2 führen, diejenigen, welche D_p mit Punkten von BB_1B_2 verbinden.

Seems a mistake

§ 67. Jede Kette des involutorischen Feldes, die weder die unendlich ferne Gerade, noch auch einen der mehrfachen Punkte enthält, besteht aus höchstens $n+1$ geschlossenen und völlig getrennten Zügen.

Ein Kettenbüschel $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}, B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$ ist auf das entsprechende $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2$ einer projectivischen Punktebene mit dem Centrum B so bezogen, dafs in den reell-projectivischen Tangentenbüscheln in den genannten $2n+2$ Punkten die Strahlen

$$A_1\mathrm{A},\ A_2\mathrm{A},\ \ldots\ A_{n+1}\mathrm{A},\ B_1\mathrm{A}^1,\ B_2\mathrm{A}^1,\ \ldots\ B_{n+1}\mathrm{A}^1,\ \mathfrak{A}_2\mathrm{B},\ \mathfrak{B}_2\mathrm{B}^1$$

einander entsprechen. Tritt statt der p getrennten Punkte $A_1, \ldots A_p$ ein $p$facher D_p ein, so hat jede Curve p Tangenten, die eine reelle Gruppe der Strahleninvolution mit den imaginären $p$fachen Strahlen $D_p\mathrm{A}$ und $D_p\mathrm{A}^1$ bilden. Sie ist so reell-projectivisch auf das Tangentenbüschel in $\mathfrak{A}_2$ bezogen, dafs $\mathfrak{A}_2\mathrm{B}$ und $\mathfrak{A}_2\mathrm{B}^1$ den imaginären Gruppen $(D_p\mathrm{A})^p$ und $(D_p\mathrm{A}^1)^p$ zugehören. Wenn D_p im Unendlichen liegt, so führen p Züge der Curve in's Unendliche. Ihre p Asymptoten bilden eine Gruppe einer Strahleninvolution mit den $p$fachen Strahlen $E_1\mathrm{A}$ und $E_1\mathrm{A}^1$. Sie ist reell-projectivisch zu dem Tangentenbüschel, und es entsprechen $(E_1\mathrm{A}^1)^p$ und $\mathfrak{A}_2\mathrm{B}$, sowie $(E_1\mathrm{A})^p$ und $\mathfrak{A}_2\mathrm{B}^1$ einander.

Den $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ beigeordneten Ketten $\mathfrak{A}_2 \circ \mathfrak{B}_2$ entsprechen AA_1A_2 und BB_1B_2 beigeordnete Ketten $A_1A_2 \ldots A_{n+1} \circ B_1B_2 \ldots B_{n+1}$. Dieselben haben mit jeder Halbkette AA_1A_2, BB_1B_2 eine Gruppe gemeinsam. Die Tangenten in einem einfachen Punkte derselben projiciren ein Paar der Involution des Grundpunktes. Indem $\mathfrak{A}_2 \circ \mathfrak{B}_2$ stetig von $\mathfrak{A}_2$ nach $\mathfrak{B}_2$ sich bewegt, schreitet $AA_1A_2 \circ BB_1B_2$ stetig von AA_1A_2 nach

BB_1B_2 fort. Jede der genannten Ketten trennt jeden Punkt A_λ von wenigstens einem der Punkte B_μ [21].

Jede Kette kann aus zwei Halbketten CC_1C_2, DD_1D_2 und DD_1D_2, CC_1C_2 zusammengesetzt werden, die im Allgemeinen aus je $n+1$ getrennten die Punkte C_λ und D_μ verbindenden Ranken bestehen. Daraus folgt unmittelbar der erste Theil des Lehrsatzes.

Das zu $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2$ projectivische Büschel AA_1A_2, BB_1B_2 entsteht, wenn man auf eine feste Anordnung I der Ketten BB_1, AA_1 projectivische Anordnungen II_α der Ketten A_2, B_2 bezieht. Die festen Ketten von I beigesellten Reihen II'_α sind zu dem Büschel $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ so projectivisch, daſs in den Tangentenbüscheln in $A_2, B_2, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2$ die Strahlen $A_2\mathbf{A}, B_2\mathbf{A}^1, \mathfrak{A}_2\mathbf{B}, \mathfrak{B}_2\mathbf{B}^1$ einander entsprechen. Solche Kettenbüschel A_2, B_2 gehören aber auch den Ketten BB_1, A_2, AA_1 und BB_1, B_2, AA_1 zu und ergeben daher in B_2 und A_2 die Tangentenbüschel des Kettenbüschels AA_1A_2, BB_1B_2.

Was über den Fall ausgesprochen ist, wo $A_1A_2 \ldots A_n$ einen $p$fachen Punkt D_p enthält, ergiebt sich ganz auf demselben Wege, wie das Entsprechende im § 48. Der Fall eines unendlich fernen Punktes der Gruppe $A_1A_2 \ldots A_n$ wird dadurch erledigt, daſs man zu dem betrachteten Strahlbüschel ein concentrisches so projectivisch setzt, daſs $\mathfrak{a}$ und $\mathbf{A}E_1$ einander entsprechen.

Einer $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ beigeordneten Kette entspricht das Erzeugniſs zweier $A_2A_3 \ldots A_{n+1}$ und $B_2B_3 \ldots B_{n+1}$ resp. B_1 und A_1 beigeordneter Schaaren. Denn wird der Punkt, dem eine Gruppe der Involution zugehört, über eine Kette $\mathfrak{A}_2 \circ \mathfrak{B}_2$ geführt, so durchläuft bei der Erzeugungsweise

$$A_2 \ldots A_{n+1}, B_2 \ldots B_{n+1}, \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_{n+1}, \ldots \;\overline{\wedge}\; B_1, A_1, \mathfrak{C}'_1, \ldots$$

$\mathfrak{C}'_1$ eine B_1 und A_1 beigeordnete Kette. Jeder Kette $AA_2 \circ BB_2$ gehört daher für die bezeichneten Lagen eine bestimmte Kette $B_1 \circ A_1$ zu. Eine Halbkette $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ trifft die Kette $\mathfrak{A}_2 \circ \mathfrak{B}_2$ in einem Punkte $\mathfrak{C}_1$. Ihre Tangenten schneiden ein Paar der Involution des Grundpunktes $\mathbf{B}$ aus. Die entsprechende Halbkette AA_1A_2, BB_1B_2 trifft daher die entsprechende beigeordnete Kette $AA_1A_2 \circ BB_1B_2$ in der einen $\mathfrak{C}_1$ entsprechenden Gruppe. Die Tangenten in einem einfachen Punkte derselben schneiden ein Paar der Involution $\mathbf{A}$ aus. Jede $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ und $B_1B_2 \ldots B_{n+1}$ beigeordnete Kette trennt jeden Punkt A_λ von wenigstens einem der Punkte B_μ, von

jedem nämlich, der mit A_λ sich durch einen Zweig einer Halbkette AA_1A_2, BB_1B_2 verbinden läfst. Wenn die Kette $\mathfrak{A}_2 \circ \mathfrak{B}_2$ sich nahe um $\mathfrak{A}_2$ oder $\mathfrak{B}_2$ zusammenschliefst, mufs sich die entsprechende Kette mit $n+1$ getrennten kleinen Zügen um $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$ resp. $B_1, B_2, \ldots B_{n+1}$ zusammendrängen.

§ 68. Liegen den Gruppen AA_1A_2, BB_1B_2 eines involutorischen Feldes diejenigen $A'A_1'A_2'$, $B'B_1'B_2'$ eines zweiten mit demselben Grundpunkt A in der Art nahe, dafs jedem $p$fachen Punkt z. B. von AA_1A_2 p verschiedene oder zum Theil zusammenfallende Punkte von $A'A_1'A_2'$ nahe liegen, so kann jeder dritten Gruppe CC_1C_2 der ersteren eine andere $C'C_1'C_2'$ der zweiten genähert werden, und wenn nun

$$AA_1A_2\,, BB_1B_2\,, CC_1C_2\,, DD_1D_2 \;\overline{\wedge}\; A'A_1'A_2'\,, B'B_1'B_2'\,, C'C_1'C_2'\,, D'D_1'D_2'$$

gesetzt wird, so kann jede Gruppe ihrer homologen beliebig genähert werden, wenn die drei ersten Paare genügend an einander heranrücken.

Man bezeichne mit $C_2\mathfrak{C}$ und $C_2'\mathfrak{C}'$ Gruppen der Involutionen AA_1, BB_1 und $A'A_1'$, $B'B_1'$, ferner setze man

$$A_2B_2C_2\mathfrak{D}_2 \;\overline{\wedge}\; A_2'B_2'C_2'\mathfrak{D}_2'\,,$$

wo dann $\mathfrak{D}_2'$ nahe bei $\mathfrak{D}_2$ liegt. DD_1D_2 und $D'D_1'D_2'$ sind dann die Coincidenzpunkte der Reihenpaare

$$AA_1\,, BB_1\,, \mathfrak{C}C_2\,, \ldots \;\overline{\wedge}\; B_2\,, A_2\,, \mathfrak{D}_2\,, \ldots \qquad 1)$$

$$A'A_1'\,, B'B_1'\,, \mathfrak{C}'C_2'\,, \ldots \;\overline{\wedge}\; B_2'\,, A_2'\,, \mathfrak{D}_2'\,, \ldots \qquad 2)$$

Man setze nun alle vier Reihen unter einander projectivisch. Dann liegt jede Gruppe der Reihe $A'A_1'$, $B'B_1'$, $\mathfrak{C}'C_2'$ bei der entsprechenden der Reihe AA_1, BB_1, $\mathfrak{C}C_2$, und ebenso liegen homologe Punkte der Reihen B_2, A_2, $D_2, \ldots$ und $B_2', A_2', D_2', \ldots$ bei einander. Daher können sich die Punkte D', D_1', D_2' nur bei den festen Punkten D, D_1, D_2 finden. Man bezeichne so, dafs D_2' bei D_2 liegt. Die im § 43 gegebene Methode der Vervollständigung einer Involutionsgruppe ergiebt dann nach § 39, dafs $D_1'D'$ bei D_1D in der Art liegen mufs, dafs jedem $p$fachen Punkte der letzteren Gruppe p verschiedene oder zum Theil zusammenfallende der ersteren nahe liegen.

§ 69. Werden von der Gruppe $B_1 \ldots B_{n+1}$ die Punkte $B_1, B_2, \ldots B_m$ den Punkten $A_1, A_2, \ldots A_m$ einer anderen Gruppe $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ genügend ge-

nähert, indefs $B_{m+1} B_{m+2} \ldots B_{n+1}$ fest bleiben, so kann man von einer dritten Gruppe $C_1' C_2' \ldots C_{n+1}'$ der Involution $A_1 \ldots A_{n+1}, B_1 \ldots B_{n+1}$ $n-m+1$ Punkte bei einer dritten Gruppe $C_{m+1} \ldots C_{n+1}$ der Involution $A_{m+1} \ldots A_{n+1}$, $B_{m+1} \ldots B_{m+1}$ annehmen, die m übrigen aber bei $A_1 A_2 \ldots A_m$. Setzt man alsdann

$$A_1 \ldots A_{n+1}, B_1 \ldots B_{n+1}, C_1' \ldots C_{n+1}', D_1' \ldots D_{n+1}' \;\overline{\wedge}$$
$$A_{m+1} \ldots A_{n+1}, B_{m+1} \ldots B_{n+1}, C_{m+1} \ldots C_{n+1}, D_{m+1} \ldots D_{n+1},$$

so liegt die Gruppe $D_{m+1}' \ldots D_{n+1}'$ bei $D_{m+1} \ldots D_{n+1}$ und es findet sich $D_1' \ldots D_m'$ bei $A_1 A_2 \ldots A_m$.

Da

$$A_1 A_2 \ldots A_m A_{m+1} \ldots A_{n+1} \text{ und } A_1 A_2 \ldots A_m B_{m+1} \ldots B_{n+1}$$

zwei Glieder einer speciellen Involution $(n+1)$ter Ordnung sind, denen zwei Gruppen der ersteren nahe liegen, so ist der Satz nur ein Corollar von § 68.

§ 70. Wenn den Gruppen eines involutorischen Feldes die entsprechenden eines zweiten mit demselben unendlich fernen Grundpunkt genähert, beide aber projectivisch gesetzt werden, so liegen die Punkte entsprechender Ketten paarweise einander nahe, und auch ihre Tangenten in einem solchen Paare, falls der Punkt der festen Ebene nicht singulär ist.

Die Ketten selbst liegen nach § 68 einander nahe. Es seien AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 Gruppen der festen Kette, die beiden letzteren aus $n+1$ verschiedenen Punkten bestehend; A_2 sei von AA_1 getrennt. Die Kette entsteht aus den Büscheln

$$BB_1, AA_1 \;\overline{\wedge}\; A_2, B_2$$

und zwar entsprechen die nach C_2 führenden Ketten einander. Es seien t_1 und τ_1 die Tangenten derselben in B_1 und A_2; es sei t_2 die Tangente in B_1 der Curve

$$BB_1, A_2, AA_1.$$

Man beziehe die Büschel in B_1 und A_2

$$t_1, t_2 \ldots \;\overline{\wedge}\; \tau_1, \tau_2 \ldots$$

so reell-projectivisch, dafs die Strahlen $B_1 \mathrm{A}$ und $A_2 \mathrm{A}$ einander entsprechen. Alsdann ist τ_2 (§ 58) die Tangente der Kette $AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2$ im Punkte A_2. Bezieht man auf die zweite Kette die gestrichenen Buchstaben, so entsteht ganz analog die Tangente τ_2'. Es müssen aber, weil

B_1 und B_1' einfache Punkte ihrer Gruppen BB_1 und $B'B_1'$ sind, t_1 und t_1', t_2 und t_2' (§ 39), endlich auch (§ 5) τ_1' und τ_1 einander nahe liegen. Man zeigt nun mit Hülfe von § 2a, Zusatz sehr leicht, dafs auch τ_2' die Tangente der Kette $A'A_1'A_2'$, $B'B_1'B_2'$, $C'C_1'C_2'$ im Punkte A_2 bei der Tangente τ_2 gelegen ist.

Ein Specialfall des Satzes entsteht, wenn man zwei Punkte A_2', A_2 einander nähert und beide durch Ketten mit den beiden festen Gruppen BB_1B_2, CC_1C_2 mittels Ketten der durch sie bestimmten involutorischen Ebene verbindet. Ihre Tangenten in A_2' und A_2 liegen einander nahe, wenn A_2 nicht ein singulärer Punkt der Involutionsebene ist. Man braucht nur $B_1'B_2'B'$ und $C_1'C_2'C'$ mit B_1B_2B und C_1C_2C zusammenfallen zu lassen, um zu diesem Resultat zu gelangen.

Nunmehr sind alle Sätze des zweiten Abschnittes von n auf $n+1$ übertragen und daher als unbedingt gültig erwiesen. Wo wir bei ihrer Aufstellung eine Unbestimmtheit festhielten, kann jetzt eine apodictische Form gebraucht werden. So steht jetzt fest, dafs eine Involution $n$ter Ordnung im Allgemeinen $2(n-1)$ Doppelpunkte hat, und dafs die Anzahl der singulären Gruppen nur dann kleiner als $2(n-1)$ ist, wenn sich Gruppen mit mehrfachen Punkten nachweisen lassen.

Vierter Abschnitt.

Neue Folge von Lehrsätzen über Involutionen. §§ 71—76.

§ 71. Sind auf demselben Träger drei nicht derselben Involution angehörige Gruppen U, V, W zu n Punkten gegeben und sind U_1, V_1 beliebige Gruppen der Involutionen V, W und U, W, so haben die beiden Involutionen U_1, V_1 und U, V eine Gruppe W_1 gemeinsam. Wird U_1 festgehalten, so ändern sich V_1 und W_1 projectivisch zu einander.

Die beiden Reihen

$$U_1, V, W, \ldots \barwedge V_1, U, W, \ldots$$

haben (§ 32) eine Gruppe WW_1 von $2n$ Punkten gemeinsam. Sie gehört den Involutionen UW, VW und U_1W, V_1W gleichzeitig an; daher (§ 33, 2) ist W_1 den Involutionen U_1, V_1 und U, V gemeinsam. Ändert man U_1

in der Involution V, W, hält V_1 aber fest, so mufs nach § 33 W_1 sich mit jener projectivisch ändern[22].

§ 72. Gehören drei Gruppen U, V, W zu n Elementen eines Trägers nicht derselben Involution an, so wird irgend ein Element E des Trägers von drei Gruppen U', V', W' einer Involution $(n-1)$ter Ordnung zu Gruppen der Involutionen $V, W; W, U; U, V$ ergänzt.

Nach § 71 giebt es eine Gruppe von V, W, die mit EU' und EV' zu einer Involution gehört und daher ebenfalls das Element E enthält.

§ 73. Durch zwei projectivische Involutionen desselben Trägers und gleicher Ordnung

$$U_1 U_2 U_3 \ldots \barwedge V_1 V_2 V_3 \ldots$$

und eine dritte, zwei entsprechende Glieder verbindende $U_1 V_1 W_1 Z_1, \ldots$ ist eine zu dieser perspectivische Schaar von Involutionen

$$1) \qquad U_1 U_2 U_3 \ldots, \; V_1 V_2 V_3 \ldots, \; W_1 W_2 W_3 \ldots, \; Z_1 Z_2 Z_3 \ldots$$

bestimmt, die sämmtlich unter einander projectivisch sind und paarweise dieselbe Coincidenzgruppe G von $2n$ Punkten ergeben. Homologe Glieder reihen sich zu Leitinvolutionen

$$2) \qquad U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots, \; U_2 V_2 W_2 Z_2 \ldots, \; U_\lambda V_\lambda W_\lambda Z_\lambda \ldots,$$

die ebenfalls unter sich projectivisch sind, und von denen irgend zwei wieder die Coincidenzgruppe G ergeben. Die neue Schaar ist perspectivisch zu allen Involutionen $U_1 U_2 U_3 \ldots$, $V_1 V_2 V_3 \ldots$, u. s. w. Jede der beiden Schaaren heifst die Leitschaar der anderen.

Die gewählte Bezeichnung soll auf die grofse Analogie hinweisen zwischen den in Discussion stehenden Gebilden und den räumlichen Regelschaaren. Eine Regelschaar kann man perspectivisch auf die Punkte irgend einer Leitgeraden beziehen. Ihre einzelnen Geraden aber kann man unabhängig davon zu der Leitschaar perspectivisch, also zu einander projectivisch setzen.

Da den Involutionen $U_\lambda V_1, G$ und $U_\lambda V_1, U_\lambda W_1$ die Glieder $U_1 V_\lambda$ (§ 33) und $U_\lambda U_1$ (ibid. Z. 2) angehören, so mufs (§ 72) ein bestimmtes Glied $U_1 W_\lambda$ der Involution $U_1 U_\lambda$, $U_1 V_\lambda$ zugleich auch in $U_\lambda W_1$, G

liegen. Da ebenso $U_1 Z_\lambda$ der Involution $U_\lambda Z_1, G$ angehört, $U_\lambda, V_\lambda, W_\lambda, Z_\lambda, \ldots$ aber Glieder derselben Involution $n$ter Ordnung sind, so ist (§ 33, 3)

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots \barwedge U_\lambda V_\lambda W_\lambda Z_\lambda \ldots,$$

und G die Coincidenzgruppe dieser Reihen.

Andererseits gehören den Involutionen $U_1 W_\lambda, G$ und $U_1 W_\mu, G$ die Gruppen $W_1 U_\lambda$ und $W_1 U_\mu$ an, und es mufs also (§ 33, 2 und 72) $U_1 W_1$ zu $U_1 W_\lambda$ und $U_1 W_\mu$, W_1 zu W_λ und W_μ involutorisch liegen. Daher ist nun

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots \barwedge W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots;$$

G ist die Coincidenzgruppe auch dieser Reihen (§ 33, 3), da sie allen Involutionen $U_1 W_\lambda$, $U_\lambda W_1$ angehört.

Haben zwei, und folglich alle Involutionen einer Schaar eine Gruppe W entsprechend gemein, so haben (§ 71) die Involutionen der Leitschaar die Gruppe W_1 der übrigen Coincidenzpunkte entsprechend gemein.

Sind die Reihen I nur verschiedene Anordnungen

$$A B U_1 U_2 U_3 \ldots; \; A B V_1 V_2 V_3 \ldots; \; A B W_1 W_2 W_3 \ldots$$

derselben Involution $n$ter Ordnung, denen die Gruppen A und B entsprechend gemeinsam sind, so sind auch die Leitinvolutionen

$$A B U_1 V_1 W_1 \ldots; \; A B U_2 V_2 W_2 \ldots; \; A B U_3 V_3 W_3 \ldots$$

nur verschiedene Anordnungen derselben Involution, denen ebenfalls die Gruppen A und B gemeinsam sind.

§ 74. Die Coincidenzgruppen $U, V, W, Z, \ldots$ zu $m+n$ Elementen zwischen einer festen Involution $M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots$ $m$ter Ordnung und den zu ihr projectivischen Involutionen

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots, \; V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots, \; W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$$

$n$ter Ordnung einer Schaar bilden eine zu allen Leitinvolutionen $U_\lambda V_\lambda W_\lambda Z_\lambda \ldots$ projectivische Involution $(m+n)$ter Ordnung.

Durch ein Element A_1 von M_1 gehe die Gruppe W_1 der Leitinvolution $U_1 V_1 W_1 \ldots$ und das Glied W von U, V; diese aber seien die Coincidenzgruppen zwischen $M_1 M_2 M_3 \ldots$ und $U_1 U_2 U_3 \ldots$ resp. $V_1 V_2 V_3 \ldots$ Man setze

$$U V W Z \ldots \barwedge U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots \qquad 1)$$

Durch die beiden Involutionen

2) $U, V, W, Z, \ldots \barwedge M_\lambda U_1, M_\lambda V_1, M_\lambda W_1, M_\lambda Z_1, \ldots$

wird eine Schaar von projectivischen Involutionen definirt. Eine dritte Involution derselben geht von dem mit U und $M_\lambda U_1$ nach der Voraussetzung involutorisch liegenden Gliede $M_1 U_\lambda$ aus. Da nun W und $M_\lambda W_1$ ein Element A_1 von M_1 gemeinsam haben, so ist dasselbe allen Gruppen der von $M_1 U_\lambda$ ausgehenden Involution der Schaar gemeinsam. Von der Involution $V, M_\lambda V_1$ bestimmt aber A_1 das Glied $M_1 V_\lambda$. Mithin gehört irgend zwei Gliedern Z und $M_\lambda Z_1$ eine Gruppe zu, die neben M_1 ein Glied $\mathfrak{Z}_\lambda$ von U_λ, V_λ enthält.

Die so entstehenden drei projectivischen Reihen

3) $M_\lambda U_1, M_\lambda V_1, M_\lambda W_1, M_\lambda Z_1, \ldots \barwedge M_1 U_\lambda, M_1' V_\lambda, M_1 \mathfrak{W}_\lambda, M_1 \mathfrak{Z}_\lambda, \ldots$
$\barwedge U, V, W, Z, \ldots$

haben mithin dieselbe Gruppe J von $2(m+n)$ Punkte gemeinsam. Der dritten und zweiten Reihe ist aber augenscheinlich M_1, der ersten und dritten M_λ gemeinsam. Daneben enthält J noch eine unveränderliche Gruppe H von $2n$ Elementen. Dieselbe ist, wie auch λ gewählt wird, den projectivischen Involutionen $U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots$ und $U_\lambda V_\lambda \mathfrak{W}_\lambda \mathfrak{Z}_\lambda \ldots$ gemeinsam. Also (§ 73) gehören alle diese Involutionen einer und derselben Schaar an; H mufs dann auch die gemeinsame Coincidenzgruppe ihrer Leitinvolutionen

4) $U_1 U_2 U_3 \ldots U_\lambda, V_1 V_2 V_3 \ldots V_\lambda, W_1 \mathfrak{W}_2 \mathfrak{W}_3 \ldots \mathfrak{W}_\lambda, Z_1 \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{Z}_3 \ldots \mathfrak{Z}_\lambda$

sein. Mithin fällt H mit G, $\mathfrak{W}_\lambda$ mit W_λ, Z_λ mit $\mathfrak{Z}_\lambda$ zusammen.

Z ist nun (§ 33, 3) das Erzeugnifs der Reihen

$$M_1 M_2 M_3 \ldots \barwedge Z_1 Z_2 Z_3 \ldots,$$

weil sie gleichzeitig als Gruppe den Involutionen

$$M_1 Z_2, M_2 Z_1 \; ; \; M_1 Z_3, M_3 Z_1 \; ; \; M_1 Z_\lambda, M_\lambda Z_1 ; \ldots$$

angehört. Da noch die Beziehung

$$U V W Z \ldots \barwedge U_\lambda V_\lambda W_\lambda Z_\lambda \ldots$$

obwaltet, so ist der Lehrsatz erwiesen. Mit jeder Leitinvolution hat $U V W Z \ldots$ aufser der Gruppe G noch das ihr zugehörige Glied der Reihe $M_1 M_2 M_3 \ldots$ gemeinsam.

§ 75. Sollen alle Gruppen einer Involution $n$ter Ordnung G_1H_1, G_2H_2, ohne daſs ihnen Elemente gemeinsam sind, Gruppen einer Involution G_1, G_2 niederer, $m$ter Ordnung umfassen, so muſs ihre Ordnungszahl ein Vielfaches rm von m sein. Ihre Glieder setzen sich aus je r Gruppen der genannten Involution zusammen, denen in einem auf die Involution $m$ter Ordnung projectivisch bezogenen, einförmigen Gebilde je eine Gruppe einer Involution $r$ter Ordnung entspricht.

Der Satz wird für Zahlen, die kleiner als n sind, vorausgesetzt. Die Gruppen der Involution ergeben sich als Coincidenzgruppen der Reihen

$$H_1, H_2, \ldots \;\overline{\wedge}\; G_2, G_1, \ldots$$

Irgend eine dritte Gruppe G_3 kann einer Involutionsgruppe von H_1G_1, H_2G_2 nur dann angehören, wenn sie zugleich in einer Gruppe $\mathfrak{H}_3$ der Involution H_1, H_2 vorkommt. Daher kann $n-m$ nicht kleiner als m sein. Sind $n-m$ und m einander gleich, so dürfen sich die Involutionen H_1, H_2 und G_1, G_2 nur durch die Anordnung unterscheiden. Bezieht man die Involution auf ein einförmiges Gebilde projectivisch, so erhält man aus $H_1H_2\mathfrak{H}_3 \ldots$ eine feste Reihe $A_1A_2\mathfrak{C}_1' \ldots$, auf welche alle möglichen Anordnungen $B_2B_1\mathfrak{C}_1 \ldots$ bezogen werden. Sie haben ein Paar der Involution A_1B_1, A_2B_2 gemeinsam, welches sich prospectivisch mit $\mathfrak{C}_1$ ändert. Zu diesen Paaren hat man die entsprechenden Gruppenpaare der Involution G_1, G_2 aufzusuchen, um die untersuchte Involution zu erhalten. Allgemein muſs $n-m$ ein Vielfaches $(r-1)m$ von m sein. H_1, H_2, $\mathfrak{H}_3, \ldots$ bestehen aus je $r-1$ Gruppen.

$$G_1', G_1'', \ldots G_1^{(r-1)} \;;\; G_2', G_2'', \ldots G_2^{(r-1)} \;;\; G_3', G_3'', \ldots G_3^{(r-1)}$$

der Involution G_1, G_2. In dem einförmigen Gebilde entspricht der Involution $(r-1)m$ter Ordnung die Involution $(r-1)$ter Ordnung

$$A_1'A_1'' \ldots A_1^{(r-1)}, \; A_2'A_2'' \ldots A_2^{(r-1)}, \; A_3'A_3'' \ldots A_3^{(r-1)} \ldots$$

Sie hat mit den verschiedenen Reihen

$$A_2 \;,\; A_1 \;,\; \mathfrak{A}_1 \ldots$$

Gruppen der Involution $A_1A_1' \ldots A_1^{(r-1)}$, $A_2A_2' \ldots A_2^{(r-1)}$ gemeinsam. Die so entstehende Gruppe muſs sich projectivisch zu dem $A_3'A_3'' \ldots A_3^{(r-1)}$ entsprechenden Gliede $\mathfrak{A}_1$ verändern, also auch projectivisch zu der $G_3'G_3'' \ldots G_3^{(r-1)}$ zugeordneten veränderlichen Gruppe $\mathfrak{G}_3$ und endlich zu der

Gruppe $H_3 G_3$ der Involution $H_1 G_1, H_2 G_2$. Aus jeder Gruppe der Involution $A_1 A_1' \ldots A_1^{(r-1)}$; $A_2 A_2' \ldots A_2^{(r-1)}$ erhält man die entsprechende der untersuchten Involution, indem man die r ihren Elementen entsprechenden Gruppen von G_1, G_2 aufsucht. $H_1 G_1, H_2 G_2$ ist also gleichsam eine Involution $r$ter Ordnung, aber gebildet aus den Gruppen einer Involution $m$ter Ordnung als Elementen.

§ 76. Von den singulären Gruppen der allgemeinen Involutionen $n$ter Ordnung.

Ein Involutionsfeld $n$ter Ordnung hat stets $2(n-1)$ Doppelpunkte, wenn man übereinkommt, in einem $p$fachen Punkt irgend einer Gruppe $p-1$ von ihnen zu vereinigen.

Man setze, wie früher, (§ 53ff.)

$$D_1 D_2 A_1 B_1 \ldots \barwedge D_1 D_2 A_1' B_1' \ldots ,$$

so entsteht aus der gegebenen Involution $AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ die projectivische $A'A_1', B'B_1', C'C_1'$. Zwei entsprechenden Gruppen EE_1 und $E'E_1'$ ist der Punkt D_2 gemeinsam. Von der Gruppe $D_2\mathfrak{A}'$ der Involution AA_1, $A'A_1'$ geht eine Involution

$$D_2\mathfrak{A}', D_2\mathfrak{B}', D_2\mathfrak{C}', D_2\mathfrak{D}', D_2\mathfrak{E}', \ldots$$

der durch beide projectische Involutionen bestimmten Schaar aus. Läſst man A_1' sich A_1 unbegrenzt nähern, so geht die Involution $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}', \ldots$ in eine andere mit $AA_1, BB_1, CC_1, \ldots$ projectivische Involution $(n-1)$ter Ordnung $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ über, die auſser D_1 noch eine Gruppe von $2(n-1)$ Punkten mit jener gemeinsam hat. $\mathfrak{C}$ ist aber nichts anderes als die Doppelpunktsgruppe der Involution D_1, CC_1 und hat daher nach der Entwickelung des § 56 in jedem $p$fachen Punkte von CC_1 selbst einen $(p-1)$fachen Punkt. G gehört alsdann zu jeder Involution $\mathfrak{A}CC_1, \mathfrak{C}AA_1$. Da D_p in der ersteren Gruppe $p$fach, in der letzteren aber nur $(p-1)$-fach enthalten ist, so kann G auſserhalb D_p nicht mehr als $2n-p-1$ Punkte enthalten. Aber noch zu unendlich vielen anderen Involutionen $n$ter Ordnung steht $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots$ in ganz derselben Beziehung, wie zu $AA_1, BB_1, CC_1, \ldots$ Alle Involutionen

1) $AA_1, B'B_1', C'C_1' \ldots$; $AA_1, B''B_1'', C''C_1'' \ldots$; u. s. w. ,

bei denen die entsprechenden Gruppen

2) $BB_1, B'B_1', B''B_1'' \ldots$; $CC_1, C'C_1', C''C_1'' \ldots$; $DD_1, D'D_1, D''D_1 \ldots$ je mit D_1^* in einer Involution liegen, genügen dieser Bedingung. Da alsdann die Involutionen 1) zu einer Schaar gehören (§ 73), so bilden ihre Coincidenzgruppen mit der einen Reihe $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ eine Involution $G'G''G''' \ldots$ $(2n-1)$ter Ordnung. Wenn man AA_1 ohne Doppelpunkte voraussetzt, so haben $G, G'', G''', \ldots$ nur D_1 gemeinsam. G' kann daher, auch wenn die zugehörige Involution beliebig nahe bei der gegebenen liegt, $2n-1$ verschiedene Punkte enthalten. Betrachtet man G' als Glied der Involution $\mathfrak{A}C'C_1'$, $\mathfrak{C}A'A_1'$, so sieht man, daſs $p_1 - 1$ verschiedene Punkte von ihr bei D_{p_1}, und analog bei jedem $p$fachen Punkt der älteren Involution $p-1$ ihrer $2(n-1)$ verschiedenen Punkte liegen. Daraus folgt der Lehrsatz.

Drittes Capitel. §§ 77—119.

Die Involutionen höheren Ranges.

Erster Abschnitt.

Die Involutionsnetze. §§ 77—86.

§§ 77—80. Das Involutionsnetz zweiter Stufe.

§§ 77. Drei Gruppen U_1, U_2, U_3 zu je n Elementen desselben Trägers gehören entweder zu einer Involution, oder sie bestimmen ein Involutionsnetz zweiter Stufe oder Mannigfaltigkeit. Dem letzteren gehören die Gruppen U_4, U_5, U_6, ... der Involution U_2, U_3 an, ferner die Gruppen der Involutionen U_1, U_2; U_1, U_3; U_1, U_4; .... Irgend zwei der Gruppen bestimmen eine Involution, die dem Netze ganz angehört und irgend zwei solche Involutionen haben eine Gruppe gemeinsam.

Die von irgend einer Gruppe U ausgehenden Involutionen bilden ein Involutionsbüschel. Auf allen Involutionen des Netzes bestimmt es unter einander projectivische Reihen, und wird zu diesen projectivisch gesetzt.

U_4' und U_5' seien zwei Gruppen des Netzes, welche den Involutionen U_1, U_4 und U_1, U_5 angehören. Die Involutionen U_4, U_5 und U_4', U_5' haben (§ 71) eine Gruppe U mit einander gemein. Setzt man nun

$$U U_4' U_5' U_\lambda' \ldots \barwedge U U_4 U_5 U_\lambda \ldots ,$$

so ist den Involutionen (Beweis zu § 71) U_4, U_4'; U_5, U_5'; ... U_λ, U_λ' die Gruppe U_1 gemeinsam, und daher liegt jede Gruppe von U_4', U_5' im Netze. Zwei beliebigen Involutionen des Netzes gehört eine Gruppe gleichzeitig an. Denn sie haben mit U_1, U_λ die Gruppen U_λ' und U_λ'', mit U_1, U_μ die Gruppen U_μ' und U_μ'' gemeinsam. Nach § 71 giebt es eine Gruppe U', die gleichzeitig U_λ', U_μ' und U_λ'', U_μ'' angehört. Setzt man nun

compare with the analogy of the [illegible] [illegible]. Group = point, Involution = line

$$U'_\lambda U'_\mu U'_\nu U' \ldots \;\overline{\wedge}\; U''_\lambda U''_\mu U''_\nu U' \ldots ,$$

so liegen irgend zwei entsprechende Gruppen dieser projectivischen Involutionen mit U_1 in je einer Involution. Das Involutionsbüschel mit dem Träger U_1 trifft daher alle nicht durch U_1 gehenden Involutionen des Netzes in projectivischen Reihen und kann daher zu ihnen perspectivisch gesetzt werden. Von jedem anderen Involutionsbüschel des Netzes gilt dasselbe, wie von dem mit dem Träger U_1[23].

§ 78. Irgend ein Element E des Trägers wird durch die Gruppen einer Involution $(n-1)$ter Ordnung zu solchen des Netzes ergänzt.

Denn man kann die Gruppen als angehörig den Involutionen U_1, U_2; U_1, U_3; U_1, U_4; ... betrachten, eine von ihnen aber als Glied der Involution U_2, U_3 oder U_2, U_λ. Aus § 72 ergiebt sich also, dafs E durch Gruppen derselben Involution $(n-1)$ter Ordnung zu Gliedern von U_1, U_2; U_2, U_λ; U_λ, U_1 ergänzt wird.

§ 79. Zwei in demselben Netze enthaltene projectivische Involutionsbüschel U_1 und U_2 heifsen perspectivisch, wenn die Involution U_1, U_2 sich selbst entspricht. Zugehörige Involutionen treffen sich in Gruppen einer anderen Involution des Netzes.

Es mögen zwei entsprechenden Involutionspaaren die Gruppen V_1 und V_2 gemeinsam sein, V_1, V_2 und U_1, U_2 aber sich in V_3 treffen. Die Büschel bestimmen auf V_1, V_2 projectivische Reihen, denen V_1, V_2, V_3 gemein sind, und die daher zusammenfallen.

§ 80. Zwei Involutionsnetze sollen zu einander collinear heifsen, wenn jeder Gruppe eine Gruppe, jeder Involution eine projectivische, jedem Involutionsbüschel aber ein projectivisches in dem zweiten Netze entspricht.

Wenn vier Gruppen U_1, U_2, U_3, U_4 eines Netzes, von denen keine drei einer Involution angehören, ihre entsprechenden V_1, V_2, V_3, V_4 unter derselben Beschränkung beliebig zugewiesen sind, so ist die collineare Beziehung vollständig gegeben.

Haben zwei collineare Involutionsnetze mehr als drei entsprechend gemeinsame Gruppen, so haben sie eine ganze Involution und eine Gruppe S

aufserhalb derselben mit einander entsprechend gemein. Zwei zugehörige Gruppen liegen alsdann mit S in je einer Involution.

Den Involutionsbüscheln

1) $$U_1(U_2 U_3 U_4 \ldots) \quad \text{und} \quad U_2(U_1 U_3 U_4 \ldots)$$

entsprechen die Büschel

2) $$V_1(V_2 V_3 V_4 \ldots) \quad \text{und} \quad V_2(V_1 V_3 V_4 \ldots).$$

Eine Gruppe U des ersteren Netzes bestimmt zwei Involutionen der Büschel 1). Die zugehörigen Involutionen der Büschel 2) aber haben die ihr entsprechende Gruppe V gemeinsam. Sind die ersteren Büschel perspectivisch, so sind es auch die letzteren. Jene treffen sich in einer Involution des ersten Netzes, und diese in der entsprechenden und zu ihr projectivischen Involution des zweiten Netzes. Jedem Involutionsbüschel entspricht nun ein projectivisches des zweiten Netzes.

In homology.

Zwei in einander liegende collineare Netze müssen zusammenfallen, wenn vier Gruppen, von denen keine drei in einer Involution liegen, mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Liegen drei sich selbst entsprechende Gruppen in einer Involution U, V, so ist dieselbe beiden Netzen entsprechend gemein. Zwei entsprechende Gruppen U_1 und V_1 bestimmen nun eine sich selbst entsprechende Involution, auf der aufser ihrer mit U, V gemeinsamen Gruppe noch eine zweite sich selbst entsprechende S liegt. Jede von S ausgehende Involution fällt mit ihrer zugehörigen zusammen, da sie mit U, V eine zweite sich selbst entsprechende Gruppe gemeinsam hat.

§§ 81—86. Das Involutionsnetz μter Stufe.

Compare with n dimensional space.

§ 81. Durch $\mu + 1$ Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu+1}$ desselben Trägers aus je m Elementen, die nicht demselben Netze $(\mu - 1)$ter Stufe angehören, ist ein Netz μter Stufe oder Mannigfaltigkeit bestimmt. In demselben liegt das aus $U_2, U_3, \ldots U_{\mu+1}$ zu bildende Involutionsnetz $(\mu - 1)$ter Stufe, und das U_1 mit ihren Gruppen verbindende Involutionsbündel. Irgend ν Gruppen $U_1', U_2', \ldots U_\nu'$ bestimmen ein ganz in dem ersteren enthaltenes Netz höchstens der $(\nu - 1)$ten Stufe. Zwei von diesen Netzen, νter und ϱter Stufe, haben ein Netz wenigstens $(\nu + \varrho - \mu)$ter Stufe gemeinsam, wofern $\nu + \varrho \geqq \mu$ ist, also wenigstens eine Gruppe, wenn $\nu + \varrho$ gleich μ ist. k Netze $\mu_1$ter,

$\mu_2$ter, ... $\mu_k$ter Stufe, die alle in einem Netze μter Stufe enthalten sind, haben ein Netz wenigstens $(\mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_k - k\mu)$ter Stufe gemeinsam.

Die Gruppen $U'_{\mu+2}$, $U'_{\mu+3}$ mögen mit U_1 und zwei beliebigen Gruppen $U_{\mu+2}$, $U_{\mu+3}$ des Netzes $U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1}$ zu Involutionen gehören. Jede Gruppe von $U'_{\mu+2}$, $U'_{\mu+3}$ liegt (§§ 77) mit einer von $U_{\mu+2}$, $U_{\mu+3}$ involutorisch zu U_1 und gehört mithin zum Netze. $U'_{\mu+2}$, $U'_{\mu+3}$ und $U_{\mu+2}$, $U_{\mu+3}$ haben eine Gruppe gemeinsam. Jede aus Gruppen des μfachen Netzes zu bildende Mannigfaltigkeit gehört demselben ganz an. Das Netz kann auch mit Hülfe einer beliebigen Gruppe V_1 desselben und des Netzes $(\mu-1)$ter Stufe $U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1}$ bestimmt werden, da jede Involution V_1, U' das Netz trifft.

Es möge irgend ein Netz αter Stufe aus den $\alpha+1$ Gruppen V_1, V_2, ... $V_{\alpha+1}$ entstehen und V_1 aufserhalb $U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1}$ liegen. Auf letzterem werden durch $V_1, V_2; V_1, V_3; \ldots V_1, V_{\alpha+1}$ die α Gruppen W_2, W_3, ... $W_{\alpha+1}$ eines Netzes $(\alpha-1)$ter Stufe bestimmt, das also den Netzen $V_1 V_2 \ldots V_{\alpha+1}$ und $U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1}$ gemeinsam ist.

Irgend ein Netz $V_2 V_3 \ldots V_{\mu+1}$ $(\mu-1)$ter Stufe und eine Gruppe V_1 aufserhalb desselben, die beide in dem Netze μter Stufe enthalten sind, sind zur Herstellung desselben nothwendig und hinreichend. Jedenfalls haben V_1, V_2 und $V_2 V_3 \ldots V_{\mu+1}$ mit $U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1}$ eine Gruppe W_2 und ein Netz $(\mu-2)$ter Stufe $W_3 \ldots W_{\mu+1}$ gemeinsam. Jede Involution W_2, U von $U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1}$ trifft $W_3 \ldots W_{\mu+1}$ in W, und daher V_1, U die Involution V_2, W von $V_2 V_3 \ldots V_{\mu+1}$ in V. Beide Bestimmungen, aus V_1 und $U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1}$ und aus V_1 und $V_2 V_3 \ldots V_{\mu+1}$, sind also vollkommen gleichbedeutend. Ein Netz $(\mu-1)$ter Stufe hat daher mit jedem einzelnen αter Stufe ein Netz $(\alpha-1)$facher Mannigfaltigkeit gemeinsam.

Ein beliebiges Netz βter Stufe kann man als Theil eines Netzes $(\mu-1)$ter Stufe ansehen. Wenn zwei Netze βter und $(\alpha-1)$ter Stufe, die in einem Netze $(\mu-1)$ter Stufe liegen, wenigstens ein Netz $(\beta+\alpha-\mu)$-ter oder $(\beta+\alpha-1-\mu+1)$ter Stufe gemeinsam haben, falls $\beta+\alpha-1$ nicht kleiner als $\mu-1$ ist, und keine Gruppe gemeinsam zu haben brauchen, wenn $\beta+\alpha-1$ kleiner als $\mu-1$ ist, so ist ein Netz mindestens der Stufe $\beta+\alpha-\mu$ auch zwei Netzen βter und αter Stufe gemeinsam, wenn beide einem dritten μter Stufe angehören. Weil nun bereits gezeigt ist, dafs ein Netz $(\varrho-1)$ter Stufe und eine Involution wenigstens eine Gruppe gemeinsam

haben, wenn sie demselben Netze ϱter Stufe angehören, so folgt der aufgestellte Satz durch einen Schlufs von $\mu-1$ auf μ. Durch $k$malige Anwendung des Satzes folgt, dafs kNetzen der Stufen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ ein anderes wenigstens der Stufe $\mu_{k+1} = \mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_k - \mu(k-1)$ gemeinsam ist. Setzt man z. B.

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots \mu_k = \mu - 1 \;;\; k = \mu, \text{ so folgt } \mu_{\mu+1} = 0,$$

und daher haben irgend μ in demselben Netze μter Stufe enthaltene $(\mu-1)$fache Mannigfaltigkeiten stets wenigstens eine Gruppe mit einander gemein[24].

§ 82 α. Alle αfachen Netze, welche dasselbe Netz $V_1 V_2 \ldots V_\alpha$ gemeinsam haben, gehören zu einem Netzbündel $(\mu-\alpha)$ter Stufe. Jede $(\mu-2)$fache Mannigfaltigkeit $V_1 V_2 \ldots V_{\mu-1}$ in $U_1 U_2 \ldots U_{\mu+1}$ bestimmt insbesondere ein Büschel von Netzen $(\mu-1)$ter Stufe. $V_1 V_2 \ldots V_\alpha$ resp. $V_1 V_2 \ldots V_{\mu-1}$ heifst der Träger des Bündels beziehlich des Büschels.

β. Zwei Netze $V_1 V_2 \ldots V_{\beta+1}$ und $U_1 U_2 \ldots U_{\alpha+1}$ $n$ter Ordnung und αter resp. βter Stufe, die einem Träger angehören und keine Gruppe gemeinsam haben, bestimmen ein Netz N $(\alpha+\beta+1)$ter Stufe, dem sie selbst und die Netzbündel angehören, welche je das eine mit den Gruppen des anderen verbinden. Irgend eine aufserhalb der gegebenen Netze in N liegende Gruppe kann nur durch eine Involution mit zwei Gruppen derselben verbunden werden.

mNetze $\alpha_1$ter, $\alpha_2$ter, $\ldots$ $\alpha_m$ter Stufe bestimmen ein Netz höchstens $(\alpha_1 + \ldots \alpha_m + m - 1)$ter Stufe, dem sie alle gleichzeitig angehören.

Die $ad\beta$ bezeichneten Gebilde gehören sicher dem durch die Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\alpha+1}$; $V_1, V_2, V_3, \ldots V_{\beta+1}$ bestimmten Netz an (§ 81). Wäre nun dieses von geringerer als der $(\alpha+\beta+1)$ Stufe, so hätten die gegebenen Netze der Voraussetzung zuwider eine Gruppe mit einander gemein. Irgend eine Gruppe W bestimmt mit dem ersteren Netze ein solches $U_1 U_2 \ldots U_{\alpha+1} W$ $(\alpha+1)$ter Stufe. Demselben gehört sicher jede Involution U, V an, welche W mit zwei Gruppen U und V der gegebenen Netze verbindet. $U_1 U_2 \ldots U_{\alpha+1} W$ und $V_1 V_2 \ldots V_{\beta+1}$ haben nach § 81 wenigstens eine Gruppe V gemeinsam und nur diese, da eine beiden gemeinsame Involution, als gelegen in $U_1 U_2 \ldots U_{\alpha+1} W$, $U_1 U_2 \ldots U_{\alpha+1}$

treffen und so eine nicht vorhandene gemeinsame Gruppe der gegebenen Netze bestimmen würde. V, W trifft $U_1 U_2 \ldots U_{\alpha+1}$ in einer Gruppe U.

§ 83. Irgend ein Element A des Trägers wird durch die Gruppen eines bestimmten Netzes $(m-1)$ter Ordnung und $(\mu-1)$ter Stufe zu Gruppen des Netzes $m$ter Ordnung und μter Stufe ergänzt.

Die genannten Gruppen kann man den Involutionen $U_1, U_2; U_1, U_3; U_1, U_4; \ldots U_1, U_{\mu+2}$, ein $(\mu-2)$faches Netz $W_2 W_3 \ldots W_\mu$ aus solchen Gruppen aber dem $(\mu-1)$fachen Netze $U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1}$ als angehörig betrachten. Wenn man mit W_1 die A enthaltende Gruppe von U_1, U_2 bezeichnet, so sind (§ 72) die betrachteten Gruppen Glieder des Netzes $W_1 W_2 \ldots W_\mu$ $(\mu-1)$ter Stufe.

§ 84. Zwei Netze gleicher Stufe heifsen collinear, wenn jeder Gruppe eine Gruppe, jeder Involution eine projectivische, und folglich jeder im ersten Netze enthaltenen Mannigfaltigkeit eine collineare in dem zweiten entspricht.

Ein Involutionsbündel ist zu allen zu ihm perspectivischen Netzen, die seinen Träger nicht enthalten, collinear. (Denn diese sind alle unter sich collinear).

Es seien $U_1 U_2 \ldots U_{\alpha+1}$ und $V_1 V_2 \ldots V_{\alpha+1}$ zwei zu dem Involutionsbündel mit dem Träger $W_1 W_2 \ldots W_{\mu-\alpha}$ perspectivische Netze. Die $(\mu-\alpha)$fachen Netze des Bündels, welche Gruppen $U_3', U_4', U_5', \ldots$ der Involution U_1, U_2 enthalten, gehören dem Netze $W_1 W_2 \ldots W_{\mu-\alpha} U_1 U_2$ $(\mu-\alpha+1)$-ter Stufe an, und treffen daher (§ 81) $V_1 V_2 \ldots V_{\alpha+1}$ in Gruppen V_3', $V_4', \ldots$ der Involution V_1, V_2. Wenn nun V_1, V_2 und U_1, U_2 eine Gruppe gemeinsam haben, also demselben Netze zweiter Stufe angehören, so trifft dasselbe in einer Gruppe W das Netz $W_1 W_2 \ldots W_{\mu-\alpha}$, das Bündel $W_1 W_2 \ldots W_{\mu-\alpha}(U_1 U_2 U_3' U_4' \ldots)$ aber in den Involutionen $W, U_1, V_1; W, U_2, V_2; W, U_3', V_3'; \ldots$ Es sind daher die beiden Reihen perspectivisch ($U_1 U_2 U_3' \ldots$ und $V_1 V_2 V_3' \ldots$). Wenn aber keine Gruppe U_1, U_2 und V_1, V_2 gleichzeitig angehört, so hat das beide umfassende Netz dritter Stufe (§ 82) mit $W_1 W_2 \ldots W_{\mu-\alpha}$ eine Involution W', W'', mit dem Bündel $(W_1 W_2 \ldots W_{\mu-\alpha})(U_1 U_2 U_3' U_4' \ldots)$ die Netze zweiter Stufe

$$W' W'' U_1 V_2 \; ; \; W' W'' U_2 V_2 \; ; \; W' W'' U_3' V_3' ; \ldots$$

gemeinsam, weil alle Gebilde in dem Netze $(\mu - \alpha + 1)$ter Stufe $W_1 W_2 \ldots W_{\mu-\alpha} U_1 U_2$ liegen. Daher sind die Involutionsbüschel $W'(U_1 U_2 U_3' U_4' \ldots)$ und $W''(V_1 V_2 V_3' V_4' \ldots)$ zu der $W' U_1 U_2$ und $W'' V_1 V_2$ gemeinsamen Involution perspectivisch, mithin unter einander projectivisch. Sind aber je zwei Involutionen U_1, U_2 und V_1, V_2 projectivisch, so müssen $U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\alpha+1}$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots V_{\alpha+1}$ collinear sein.

§ 85. Die collineare Beziehung zwischen zwei Netzen μter Stufe ist eindeutig bestimmt, wenn $\mu + 2$ Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu+2}$, von denen keine $\mu + 1$ demselben Netze $(\mu - 1)$ter Stufe angehören, ihre entsprechenden $V_1, V_2, \ldots V_{\mu+2}$ zugewiesen sind.

Zusatz. Zwei in einander liegende collineare Netze μter Stufe können daher, ohne identisch zu sein, mehr als $\mu + 1$ Gruppen nur dann entsprechend mit einander gemein haben, wenn dieselben ein ganzes Netz νter Stufe $(\nu < \mu)$ gemeinsam haben, oder mehrere getrennte Netze $\nu_1$ter, $\nu_2$ter, $\nu_3$ter, ... Stufe.

Man hat zu setzen

$$(U_2 U_3 \ldots U_\mu)(U_1 U_{\mu+1} U_{\mu+2} \ldots) \;\overline{\wedge}\; (V_2 V_3 \ldots V_\mu)(V_1 V_{\mu+1} V_{\mu+2} \ldots)$$
$$(U_3 U_4 \ldots U_\mu U_1)(U_2 U_{\mu+1} U_{\mu+2} \ldots) \;\overline{\wedge}\; (V_3 V_4 \ldots V_\mu V_1)(V_2 V_{\mu+1} V_{\mu+2} \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(U_1 U_2 \ldots U_{\mu-1})(U_\mu U_{\mu+1} U_{\mu+2} \ldots) \;\overline{\wedge}\; (V_1 V_2 \ldots V_{\mu-1})(V_\mu V_{\mu+1} V_{\mu+2} \ldots)$$

Irgend eine Gruppe U des ersten Netzes bestimmt μ Netze der links stehenden Büschel. Die μ entsprechenden Netze der Büschel rechter Hand treffen sich in der zugehörigen Gruppe V. Bezieht man die ersteren Büschel auf einander vermittelst einer beliebigen Involution U', U'' des ersten Netzes, so sind sie perspectivisch und ihnen allen ist das Netz $U_1 U_2 \ldots U_\mu$ entsprechend gemein. Auch die rechts stehenden Büschel werden dadurch in perspectivische Beziehung gesetzt und erzeugen die jener entsprechende Involution V', V''.

Sind zwei collinearen Netzen μter Stufe, die ganz oder theils ineinanderliegen und deshalb gleicher Ordnung sind, $\mu + 2$ Gruppen entsprechend gemeinsam, ohne daſs sie zusammenfallen, so müssen wenigstens $\mu + 1$ derselben einem Netze $(\mu - 1)$ter Stufe angehören, weil sonst die obigen Büschel identisch gemacht werden könnten. Das ist aber nur

dann möglich, wenn in diesem, also auch in jenem, ein Netz νter Stufe sich Gruppe für Gruppe entspricht. Eine solche Beziehung ergiebt sich stets, wenn man $\nu + 1$ unabhängige Gruppen $A_1, A_2, \ldots A_{\nu+1}$ eines Netzes νter Stufe sich selbst und irgend zwei Netze $(\mu - \nu + 1)$ter Stufe, die in einer anderen Gruppe $A_{\nu+2}$ der ersteren sich treffen, einander zuweist. Da alsdann je $\mu + 2$ Gruppen $A_1, \ldots A_{\nu+1}, B_{\nu+2}, \ldots B_{\mu+2}$ und $A_1, \ldots A_{\nu+1}, B'_{\nu+2}, \ldots B'_{\mu+2}$, von denen keine $\mu + 1$ in einem Netze $(\mu - 1)$ter Stufe liegen, sich den einen und den anderen Beschränkungen gemäfs finden lassen, so können die collinearen Gebilde noch eindeutig bezogen werden. Da $A_{\nu+2}$ beiden Feldern gemeinsam ist, so ist ihnen das ganze Netz $A_1 \ldots A_{\nu+1}$ entsprechend gemein.

§ 86. Durch zwei collineare Netze μter Stufe und $m$ter Ordnung $(U_1 U_2 \ldots U_{\mu+2} \ldots$ coll. $V_1 V_2 \ldots V_{\mu+2} \ldots)$ desselben Trägers und eine zwei entsprechende Gruppen verbindende Involution $U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots$ ist eine zu dieser perspectivische Schaar zu jenen collinearer Netze

$$U_1 U_2 \ldots U_{\mu+2} \ldots \text{ coll. } V_1 V_2 \ldots V_{\mu+2} \ldots, \text{ coll. } W_1 W_2 \ldots W_{\mu+2} \ldots \text{ coll. } Z_1 Z_2 \ldots Z_{\mu+2} \ldots \text{ oder } (U) \text{ coll. } (V) \text{ coll. } (W) \text{ coll. } (Z).$$

bestimmt. Ihre homologen Glieder ordnen sich zu unter einander projectivischen Leitinvolutionen

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots \;\overline{\wedge}\; U_2 V_2 W_2 Z_2 \ldots \;\overline{\wedge}\; U_3 V_3 W_3 Z_3 \ldots \;\overline{\wedge}\; U_\lambda V_\lambda W_\lambda Z_\lambda \ldots$$

Mit Ausnahme einzelner haben alle Netze der Schaar diejenigen Netze $R_1, R_2, \ldots R_s$ der Stufen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ mit einander entsprechend gemein, die in den beiden gegebenen Netzen entsprechend zusammenfielen; ($\alpha_\lambda = 0$ bedeutet eine einzelne entsprechend gemeinsame Gruppe). Es giebt jedoch ein Netz, das nur noch von der $(\mu - \alpha_\lambda - 1)$ten Stufe ist, R_λ nicht enthält, wohl aber $R_1, \ldots R_{\lambda-1}, R_{\lambda+1}, \ldots R_s$. Zwei entsprechenden R_λ enthaltenden $(\alpha_\lambda + 1)$fachen Netzen von $U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu+2}$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots V_{\mu+2}$ gehört eine Gruppe des singulären Netzes zu.

Sollte die Ordnungszahl der betrachteten Involutionen kleiner als 2μ sein, so fügen wir allen Gruppen derselben eine Anzahl unveränderlicher Elemente hinzu, und erhöhen dadurch die Ordnung der Netze. Wenn die beiden Träger U und V der collinearen Netze ein Netz S αter Stufe beide enthalten, in dem die entsprechend gemeinsamen Netze $R_1, R_2, \ldots$

R_t liegen, und also zusammen in einem Netze R $(2\mu - a)$ter Stufe liegen, so nehme man aufserhalb R ein Netz S_1 $a$ter Stufe an. In dem Gebilde $(a + \mu + 1)$ter Stufe, dem V und S_1 angehören, kann man ein Netz μter Stufe V' annehmen, das weder mit S noch mit S_1 und folglich auch nicht mit U eine Gruppe gemein hat.

Das Gebilde $V_1 V_2 V_3 \ldots V_{\mu+2}$ ersetzen wir durch das andere $V'_1 V'_2 \ldots V'_{\mu+2}$, welches zu $S_1(V_1 V_2 \ldots V_{\mu+2})$ bezüglich V' perspectivisch ist. Es besteht dann die Beziehung

$$V'_1 V'_2 V'_3 \ldots V'_{\mu+2} \text{ coll. } U_1 U_2 \ldots U_{\mu+2}.$$

Wir beweisen den aufgestellten Lehrsatz zuerst für diese letzteren Netze. Irgend $\mu + 1$ der Involutionen $V'_1, U_1; V'_2, U_2; \ldots V'_{\mu+2}, U_{\mu+2}$ constituiren ein Netz N $(2\mu + 1)$ter Stufe. Denn in N liegen jedenfalls die Netze $V'_1 V'_2 \ldots V'_{\mu+2}$ und $U_1 U_2 \ldots U_{\mu+2}$, und diese müfsten gemeinsame Gruppen haben (§ 81), wenn N von niederer als der $(2\mu + 1)$ten Stufe wäre. Mithin bestimmen auch (§ 81) irgend μ von diesen Involutionen ein Netz $(2\mu - 1)$ter Stufe und mit irgend einer Gruppe W aufserhalb desselben ein Netz 2μter Dimension. Das Involutionsnetz 2μter Stufe $V'_1 U_1 V'_2 U_2 \ldots V'_\mu U_\mu W$ hat daher mit $V'_{\mu+1}, U_{\mu+1}$ eine Gruppe $W'_{\mu+1}$ gemeinsam, nach § 81 wenigstens eine, und da $V'_1, U_1; V'_2, U_2; \ldots V'_{\mu+1}, U_{\mu+1}$ ein Netz $(2\mu + 1)$ter Stufe constituiren, höchstens eine. Die Involution $W, W'_{\mu+1}$ mufs nun, da sie mit $V'_1, U_1; V'_2, U_2; \ldots V'_\mu, U_\mu$ zu einem Netze 2μter Stufe gehört, die letztere Mannigfaltigkeit in einer Gruppe W' treffen. Hieraus folgt nun, wenn wir μ gleich 1 setzen, zuerst, dafs in jedem dreifachen Netze von einer beliebigen Gruppe eine Involution ausgeht, die mit zwei beliebigen sich nicht treffenden Involutionen je eine Gruppe gemeinsam hat. Setzt man voraus, dafs durch W' eine $(\mu - 1)$fache Mannigfaltigkeit sich legen läfst, die mit $U_1, V'_1; U_2, V'_2; \ldots U_\mu, V'_\mu$ je eine Gruppe $W'_1, W'_2, \ldots W'_\mu$ gemeinsam hat, so kann man durch W ein Netz μter Stufe legen, das aufser den schon genannten Gruppen $W'_1, W'_2, \ldots W'_\mu$ noch die Gruppe $W'_{\mu+1}$ von $W'_{\mu+1}, U_{\mu+1}$ enthält. Denn das vorige Netz $(\mu - 1)$ter Stufe und $W, W'_{\mu+1}$ bestimmen, weil sie eine Gruppe W' gemeinschaftlich haben, nur ein Netz μter Stufe.

Ein Schlufs von $\mu - 1$ auf μ zeigt uns daher, dafs die Gruppe W mit $\mu + 1$ Gruppen $W'_1, W'_2, \ldots W'_{\mu+1}$ von $U_1, V'_1; U_2, V'_2; U_3, V'_3; \ldots$

$U_{\mu+1}, V'_{\mu+1}$ durch ein Netz μter Stufe verbunden werden kann. Fällt W mit einer Gruppe $W'_{\mu+2}$ von $U_{\mu+2}, V'_{\mu+2}$ zusammen, so giebt es jedenfalls nur ein Netz

$$W'_1 W'_2 W'_3 \dots W'_{\mu+1} W'_{\mu+2} \quad \text{oder} \quad (W')$$

Wäre nämlich

$$W''_1 W''_2 W''_3 \dots W''_\alpha W'_{\alpha+1} \dots W'_{\mu+1} W'_{\mu+2} \quad \text{oder} \quad (W'')$$

ein zweites Netz der verlangten Art, so könnte doch $W''_1 W''_2 W''_3 \dots W''_\alpha$ das Netz $W'_1 W'_2 \dots W'_\alpha \dots W'_{\mu+1}$ nicht treffen, weil sonst das Netz, welches aus den Involutionen W'_1, W''_1 oder U_1, V'_1, W'_2, W''_2 oder $U_2, V'_2, \dots$ W'_α, W''_α oder $U_\alpha, V'_\alpha, U_{\alpha+1} W'_{\alpha+1}$ oder $U_{\alpha+1}, V'_{\alpha+1}, \dots$ endlich $U_{\mu+1}$, $W'_{\mu+1}$ oder $U_{\mu+1}, V'_{\mu+1}$ hervorgeht, höchstens von der $(\mu+\alpha-1+\mu-\alpha+1)$-ten oder 2μten Stufe wäre. Demnach hätten (W') und (W'') höchstens ein Netz $(\mu-\alpha)$ter Stufe gemeinsam, dem die $\mu-\alpha+2$ Gruppen $W'_{\alpha+1}$, $W'_{\alpha+2}, \dots W'_{\mu+1}, W'_{\mu+2}$ angehören müfsten. Dann könnten aber $U_{\alpha+1}$, $V'_{\alpha+1}$; $U_{\alpha+2}, V'_{\alpha+2}; \dots U_{\mu+2}, V'_{\mu+2}$ nicht mit $\alpha-1$ anderen Involutionen zusammen das zu Grunde liegende Netz $(2\mu+1)$ter Stufe bestimmen. Da nun irgend $\mu+1$ der Involutionen $U_1, V'_1; U_2, V'_2; \dots U_{\mu+2}, V'_{\mu+2}$ dazu in der That genügen, so fallen (W') und (W'') zusammen. Die Netze

$$W'_1 W'_2 W'_3 \dots W'_{\mu+2}; Z'_1 Z'_2 Z'_3 \dots Z'_{\mu+2}; X'_1 X'_2 X'_3 \dots X'_{\mu+2}; \dots,$$

welche von den verschiedenen Gruppen $W'_{\mu+2}, Z'_{\mu+2}, U'_{\mu+2}, \dots$ der Involution $U_{\mu+2}, V'_{\mu+2}$ ausgehen, sind aus denselben Gründen alle von einander verschieden.

Die beiden collinearen Bündel

$$(Z'_1 Z'_2 \dots Z'_{\mu+2})(U_1 U_2 U_3 \dots U_{\mu+2}) \text{ coll. } (Z'_1 Z'_2 \dots Z'_{\mu+2})(V'_1 V'_2 \dots V'_{\mu+2})$$

sind identisch, da nämlich U_1 und V'_1, U_2 und V'_2, U_3 und $V'_3, \dots U_{\mu+2}$ und $V'_{\mu+2}$ je demselben Netze des Bündels $Z'_1 Z'_2 \dots Z'_{\mu+1}$ angehören. Irgend zwei entsprechende Gruppen $U_{\mu+\lambda}$ und $V'_{\mu+\lambda}$ liegen mithin mit $Z'_1 Z'_2 \dots Z'_{\mu+1}$ in einem Netze $(\mu+1)$ter Stufe; $U_{\mu+\lambda}, V'_{\mu+\lambda}$ trifft das letztere Netz in einer Gruppe $Z'_{\mu+\lambda}$, aus analogen Gründen aber $W'_1 W'_2 \dots W'_{\mu+2}; X'_1 X'_2 \dots X'_{\mu+2}; \dots$ in je einer Gruppe $W'_{\mu+\lambda}, X'_{\mu+\lambda}, \dots$ Die verschiedenen Netze

$$U_1 U_2 U_3 \dots U_{\mu+2} \dots U_{\mu+\lambda}; \; V'_1 V'_2 \dots V'_{\mu+2} \dots V'_{\mu+\lambda};$$
$$W'_1 W'_2 \dots W'_{\mu+2} \dots W'_{\mu+\lambda}; \dots$$

sind zu einander collinear, weil sie zu demselben Netzbündel perspectivisch sind (§ 84). Ebenso sind die Leitinvolutionen

$$U_{\mu+1} V'_{\mu+1} W'_{\mu+1} X'_{\mu+1} \dots ; \; U_{\mu+2} V'_{\mu+2} W'_{\mu+2} X'_{\mu+2} \dots ; \; U_{\mu+\lambda} V'_{\mu+\lambda} W'_{\mu+\lambda} X'_{\mu+\lambda} \dots ; \dots$$

zu einander projectivisch, da sie zu unendlich vielen Büscheln von Netzen 2μter Stufe perspectivisch sind.

Der aufgestellte Satz gilt daher zunächst für die in allgemeiner Lage befindlichen Netze $U_1 U_2 U_3 \dots U_{\mu+2}$ und $V'_1 V'_2 \dots V'_{\mu+2}$. Wenn wir die Gruppen irgend eines Netzes $W'_1 W'_2 \dots W'_{\mu+2}$ der Schaar mit S_1 durch Netze $(\alpha+1)$ter Stufe verbinden, so treffen diese das Netz R $(2\mu-\alpha)$ter Stufe, in dem die gegebenen Gebilde liegen, in den Gruppen $W_1, W_2, \dots W_{\mu+2}$ eines zu $W'_1 W'_2 \dots W'_{\mu+2}$ und damit zu $U_1 U_2 \dots U_{\mu+2}$ collinearen Netzes. Auf gleiche Art entstehen aus den projectivischen Leitinvolutionen $U_1 V'_1 W'_1 Z'_1 \dots ; U_2 V'_2 W'_2 Z'_2 \dots ; \dots$ die unter sich projectivischen Leitinvolutionen

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \dots \barwedge U_2 V_2 W_2, Z_2 \dots \barwedge U_3 V_3 W_3 Z_3 \dots$$

der untersuchten Schaar, deren Existenz hiermit nachgewiesen ist. Dafs keine zweite möglich, ist deswegen klar, weil die projectivischen Involutionen unendlich vieler Schaaren homologe Gebilde der verschiedenen Netze sein müssen.

Es ist noch zu erwägen, ob einzelne Netze der Schaar ausarten können. Dies tritt nur bei der Projection eines Netzes $X'_1 X'_2 X'_3 \dots X'_{\mu+2}$ ein, das mit S_1 ein Netz R'_λ $\alpha_\lambda$ter Stufe gemeinsam hat und also mit S_1 in einem Netze $(\alpha+\mu-\alpha_\lambda)$ter Stufe liegt; die Projection findet sich folglich in einem Theilnetze von R der Stufe $2\mu-\alpha+\alpha+\mu-\alpha_\lambda-2\mu-1 = \mu-\alpha_\lambda-1$ gelegen. Jede Leitinvolution der Hülfsschaar, welche von einer Gruppe von R'_λ ausgeht, hat mit R eine Gruppe U_ϱ gemeinsam und alle ihre Gruppen werden von S_1 aus in dieselbe projicirt. Sie ist demnach den beiden gegebenen collinearen Netzen und überhaupt allen regulären Netzen der Schaar entsprechend gemein. Nur der Träger $(\mu-\alpha_\lambda-1)$ter Stufe enthält das Netz R_λ nicht, das so aus R'_λ entsteht, oder correcter ausgedrückt: Nur den Gruppen aufserhalb R_λ gehören in dem ausgearteten Netze bestimmte Gruppen zu, diejenigen aber, welche Gruppen von R_λ entsprechen, werden völlig unbestimmt, und man sieht daher ganz

von ihnen ab. Andererseits gehen ganz offenbar von allen und nur von entsprechend gemeinsamen Gruppen der gegebenen Netze Leitinvolutionen der Hülfsschaar aus, die S_1 treffen. Von einem entsprechend gemeinsamen Netze R_λ ausgehende Leitinvolutionen haben dabei mit S_1 wiederum ein Netz $\alpha_\lambda$ter Stufe gemeinsam, das einem Gliede der Hülfsschaar vollkommen angehört. Für jedes entsprechend gemeinsame Netz der gegebenen collinearen Gebilde giebt es ein Glied der Schaar, das alle anderen sich selbst entsprechenden Netze, nur nicht dies besondere, mit den beiden gegebenen gemeinsam hat[25].

Zweiter Abschnitt.

Die Involutionen zweiten Ranges. §§ 87—98.

§ 87. Die entsprechenden Involutionen zweier projectivischer aber nicht perspectivischer Büschel

$$U(W_1 W_2 W_3 \ldots) \;\overline{\wedge}\; V(W_1 W_2 W_3 \ldots)$$

desselben Netzes $n$ter Ordnung und zweiter Stufe treffen sich in den Gruppen W_1, W_2, W_3, ... einer zu ihnen perspectivischen Involution $n$ter Ordnung und zweiten Ranges, der auch die Gruppen U und V angehören. Alle Büschel, welche die Reihe $W_1 W_2 W_3 \ldots$ von Gruppen der Involution zweiten Ranges aus projiciren, sind zu einander projectivisch und können zu ihr perspectivisch gesetzt werden. Durch fünf Gruppen, von denen keine drei derselben Involution (ersten Ranges) angehören, ist eine Involution zweiten Ranges bestimmt[26].

Mit jeder Involution des Netzes hat dies Gebilde zwei Gruppen gemeinsam. Insbesondere ist jedes Element des Trägers in zwei Gruppen enthalten.

Auf einer beliebigen Involution des Netzes bestimmen die Büschel U und V projectivische Reihen. Ihre beiden gemeinsamen Gruppen gehören zugleich der Involution zweiten Ranges an. Daher enthalten auch zwei Gruppen ein beliebiges Element des Trägers, indem dasselbe (§ 78) eine specielle Involution des Netzes bestimmt. Die beiden Gruppen fallen für specielle Involutionen des Netzes zusammen. Die Involutionen, welche

U, V je in den Büscheln U und V entsprechen, begegnen der Involution zweiten Ranges nur in U und V und sind die Tangenteninvolutionen in diesen Gruppen.

Die beiden Büschel

$$U(W_1 W_2 W_3 \ldots) \overline{\wedge} V(W_1 W_2 W_3 \ldots)$$

bestimmen auf W_1, W_2 und W_1, W_3 perspectivische Reihen. Die Involutionen, welche entsprechende Gruppen verbinden, gehen daher (§ 77) alle durch eine feste Gruppe Z. U, W_2 und V, W_3 sind aber solche Involutionen und enthalten daher Z. Jede durch sie gehende Involution z hat mit W_1, W_2 und W_1, W_3 Gruppen gemeinsam, deren Verbindungsinvolutionen mit U und V in einer Gruppe W_λ der Involution zweiten Ranges sich treffen. W_0 sei eine beliebige Gruppe derselben. Die Involutionen, welche von W_2 und W_3 aus nach den z mit U, W_0 und V, W_0 gemeinsamen Gruppen führen, treffen sich in den Gruppen W'_α einer zweiten Involution zweiten Ranges, der W_2, W_3, U, V, ferner W_1 nach der Entstehungsweise von W_0, angehören, und in der schliesslich diese Gruppe selbst, als der Lage Z, W_0 entsprechend, liegt. Durch U, V, W_1 ist aber die Beziehung der Büschel W_3 und W_2, und damit die zweite Involution zweiten Ranges bestimmt. Sie ist daher mit der ersten, auf welcher W_0 ganz beliebig war, identisch. Da hiernach die Involutionsbüschel, welche eine Involution zweiten Ranges $W_1 W_2 W_3 W \ldots$ mit irgend welchen ihrer Gruppen verbinden, unter einander projectivisch sind, so kann erstere zu diesen allen als perspectivisch bezeichnet werden. Eine durch fünf Gruppen U, V, W_1, W_2, W_3 gehende Involution zweiten Ranges kann durch die beiden Büschel U und V erzeugt werden und ist daher eindeutig bestimmt.

§ 88. Zwei projectivische Involutionen zweiten Ranges

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots U \overline{\wedge} V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots V$$

sind homologe Gebilde ihrer collinear bezogenen Netze.

Denn es ist zu setzen

$$U_1(U_2 U_3 U_4 \ldots U) \overline{\wedge} V_1(V_2 V_3 V_4 \ldots V)$$
$$U_2(U_1 U_3 U_4 \ldots U) \overline{\wedge} V_2(V_1 V_3 V_4 \ldots V)$$

Die Behauptung folgt daher aus § 85[27].

§ 89. Um zwei gegebene Involutionen projectivisch zu beziehen, kann man noch drei Gruppen der einen ihre entsprechenden in der anderen beliebig zuweisen. Um auf eine gegebene Involution $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots U$ zweiten Ranges eine andere $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots V$ projectivisch zu beziehen, kann man noch vier Gruppen U_1, U_2, U_3, U_4 der ersteren, von denen keine drei einer Involution angehören, vier Gruppen V_1, V_2, V_3, V_4 unter derselben Beschränkung beliebig zuweisen.

Im zweiten Falle muſs

$$V_1(V_2 V_3 V_4 V \ldots) \barwedge U_1(U_2 U_3 U_4 U \ldots)$$
$$V_2(V_1 V_3 V_4 V \ldots) \barwedge U_2(U_1 U_3 U_4 U \ldots)$$

sein. Zwei verschiedene Involutionen zweiten Ranges kann es nicht geben, weil sonst, entgegen § 80,

$$V_1 V_2 V_3 V_4 V \text{ coll. } V_1 V_2 V_3 V_4 V'$$

sein könnte.

§ 90. Durch irgend zwei zu einander projectivische Involutionen $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ oder $[U]$ und $[V]$ $n$ter Ordnung und zweiten Ranges desselben Trägers und eine zwei entsprechende Gruppen verbindende Involution $U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots$ ist eine zu dieser perspectivische Schaar zu jenen projectivischer Involutionen zweiten Ranges

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots \barwedge V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots \barwedge W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots \barwedge Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots \barwedge X_1 X_2 X_3 X_4 \ldots \barwedge \ldots$$

oder

$$[U] \barwedge [V] \barwedge [W] \barwedge [Z] \barwedge [X] \barwedge \ldots$$

bestimmt. Entsprechende Gruppen liegen in projectivischen Leitinvolutionen

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots \barwedge U_2 V_2 W_2 Z_2 \ldots \barwedge \ldots \barwedge U_\lambda V_\lambda W_\lambda Z_\lambda \ldots$$

Haben die beiden gegebenen Involutionen eine Gruppe X_0 entsprechend gemein, so ist eine zu den beiden gegebenen projectivische Involution ersten Ranges ein Glied der Schaar. Haben die beiden Involutionen zwei Gruppen X_0 und Y_0 mit einander gemeinsam, so giebt es entweder zwei gewöhnliche Involutionen in der Schaar, von denen die eine nur X_0, die andere nur Y_0 enthält, oder eine Gruppe, die mit je zwei entsprechenden Gliedern der beiden Reihen in einer Involution liegt. Sind drei Gruppen X_0, Y_0 und Z_0 den Reihen entsprechend gemeinsam, so kommen ent-

weder die drei Involutionen $Y_0, Z_0; Z_0, X_0$ und X_0, Y_0 in der Schaar vor, oder nur eine von ihnen, und die übrig bleibende Gruppe liegt dann mit je zwei entsprechenden involutorisch.

Take representing curves first in different planes

Man fasse die projectivischen Reihen (§ 88) als homologe Bestandtheile collinearer Netze

$$U_\lambda\, U_1\, U_2\, U_3\, U_4 \ldots \text{ coll. } V_\lambda\, V_1\, V_2\, V_3\, V_4 \ldots \text{ oder } (U) \text{ coll. } (V)$$

auf. Giebt es in ihnen keine ineinanderfallenden und folglich auch keine entsprechend gemeinsamen Gruppen, so ergiebt sich unmittelbar die Netzschaar (§ 86), und als Bestandtheil die Schaar der Involutionen zweiten Ranges. Haben die beiden Netze eine, zwei oder drei gemeinsame Gruppen, so ergeben sich eben so viele singuläre Bestandtheile der Netz- und Involutionsschaar.

In diesem Falle (vgl. § 86) müssen wir eine Hülfsnetzschaar $(U)(V')$ $(W')(Z') \ldots$ von einem Netze S' aus auf den Träger (UV) der Gebilde $[U]$ und $[V]$ projiciren. Von jeder den collinearen Gebilden (U) und (V) entsprechend gemeinsamen Gruppe A geht eine Leitinvolution der Hülfsnetzschaar aus, die S' in einer Gruppe A' trifft. Durch A' geht ein Glied (X') der Netzschaar, der Träger eines Gliedes der Involutionsschaar. Die Involution J, in welcher (UV) von dem Netze $(X'S')$ getroffen wird, ist ein singulärer Bestandtheil der Netzschaar $(U)(V)(W) \ldots$. Lag A außerhalb der Involutionen $[U]$ und $[V]$, so trifft jedes Netz des Bündels S' das in (X') gelegene Glied $[X']$ der Hülfsinvolutionsschaar in zwei verschiedenen Gruppen, und die Involution ersten Ranges J ist somit als Glied der Involutionsschaar $U_1\, U_2\, U_3\, U_4 \ldots,\ V_1\, V_2\, V_3\, V_4 \ldots$ oder $[U], [V]$ zweideutig auf die regulären Bestandtheile derselben bezogen. Ist aber A den Involutionen $[U]$ und $[V]$ entsprechend gemein, so gehört A' der Involution zweiten Ranges $X_1' X_2' X_3' X_4' \ldots$ an. Dieselbe wird daher von S' aus in eine zu $[U]$ und $[V]$ projectivische Involution ersten Ranges projicirt. Der Gruppe A wird in derselben die von A im Allgemeinen verschiedene Gruppe A_1 zugeordnet, welche durch das $X_1' X_2' X_3' X_4' \ldots$ in A' berührende Netz des Bündels S' ausgeschnitten wird. An und für sich wird die A zugeordnete Gruppe ganz unbestimmt. Eine solche Involution erhält man für jede $[U]$ und $[V]$ entsprechend gemeinsame Gruppe X_0, falls nicht etwa die beiden Collineationen, welche aus den projectivischen

Gebilden entspringen, eine Involution entsprechend mit einander gemein haben. Das kann jedoch nur dann eintreten, wenn zwei verschiedene Gruppen von $[U]$ oder eine Gruppe und ihre Tangenteninvolution mit den entsprechenden Gebilden von $[V]$ übereinstimmmen. Es giebt alsdann in dem Hülfsnetz S' eine Involution, die einem Netze (X') der Schaar (U), (V') angehört. Alle Gruppen der ersteren werden von S' aus in dieselbe feste Gruppe P projicirt, die daher auch mit irgend zwei entsprechenden Gruppen von $[U]$ und $[V]$ involutorisch liegt. Ist noch eine weitere Gruppe $[U]$ und $[V]$ entsprechend gemeinsam, wo dann beide Reihen Bestandtheile desselben Netzes sind, so erhält man drei verschiedene Involutionen Y_0, Z_0; Z_0, X_0 und X_0, Y_0 ersten Ranges in der Schaar, falls die beiden Netze keine weiteren Gruppen entsprechend gemeinsam haben. Ist aber jede Gruppe von Y_0, Z_0 beiden Netzen gemeinsam, so liegt eine Gruppe des Netzes mit irgend zwei entsprechenden von $[U]$ und $[V]$ involutorisch und es ergiebt sich eine Involution ersten Ranges im Netze, die X_0 enthält.

Zusatz: Da entsprechende Glieder aller Involutionen einer Schaar in Involutionen ersten Ranges angeordnet liegen, entsprechend gemeinsame Gruppen derselben allen nicht entarteten Gliedern der Schaar gemeinsam sind, so ergeben irgend zwei Involutionen zweiten Ranges der Schaar dieselben gemeinsamen Elemente. Bei den singulären Bestandtheilen aber kann man von vorne herein feststellen, welche Coincidenzelemente bei ihnen sich nicht vorfinden.

§ 91. Das Gebilde $U_1', U_2', U_3', U_4', \ldots$ einer Involution ersten Ranges, in welches die Involution zweiten Ranges U_1, U_1''; U_2, U_2''; U_3, U_3''; U_4, U_4''; ... von einer nicht in ihr liegenden Gruppe A ihres Netzes aus projicirt wird, soll eine entartete Involution zweiten Ranges, diese aber ihr Zeiger genannt werden. Vermöge ihrer Zeiger können entartete Involutionen zweideutig auf Gebilde bezogen werden, die zum Zeiger projectivisch sind. In jedem durch U_1', U_2' gehenden Netze zweiter Stufe kann man unendlich viele zum ersten projectivische Zeiger der entarteten Involution zweiten Ranges finden.

C sei eine Gruppe von n Elementen aufserhalb $A U_1' U_2'$. Auf irgend einem Involutionsnetze $U_1' U_2' B$ zweiter Stufe des Netzes $U_1' U_2' C A$

bestimmt C, A die Gruppe B und $C(U_1 U_1'' U_2 U_2'' \dots)$ die zur gegebenen projectivische Involution zweiten Ranges $V_1 V_1'' V_2 V_2'' \dots$ Sie ist ein zweiter Zeiger der entarteten Involution, weil $B, V_1, V_1''; B, V_2, V_2'; B, V_3, V_3''; \dots$ in $U_1'; U_2'; U_3'; \dots$ treffen. Von hier aus kann man wieder rückwärts unendlich viele in $U_1' U_2' A$ gelegene und zu dem ersten projectivische Zeiger auffinden.

Sollte die Ordnung der entarteten Involution nicht höher als 2 sein, so betrachten wir statt ihrer eine zweite, deren Glieder sich durch Zufügung einer unveränderlichen Gruppe G von den ihrigen sich unterscheiden; sie wird dann aus dem Zeiger $GU_1, GU_1''; GU_2, GU_2''; \dots$ von GA aus projicirt. Für die Involution GU_1', GU_2', GU_3' gilt nun das Bewiesene. Für sie erhalten wir noch unendlich viele andere Zeiger im Netze GU_1', GU_2', GA und daher auch unendlich viele Zeiger für $U_1' U_2' U_3' \dots$ in $U_1' U_2' A$.

§ 92. Zwei entartete Involutionen zweiten Ranges und gleicher Ordnung $U_1' U_2' U_3' \dots$ und $V_1' V_2' V_3' \dots$, die demselben Träger angehören, und deren Zeiger $U_1 U_1'' U_2 U_2'' U_3 U_3'' \dots$ und $V_1 V_1'' V_2 V_2'' V_3 V_3'' \dots$ zu einander projectivisch sind, oder eine entartete und eine zu ihrem Zeiger $U_1' U_1'' U_2 U_2'' U_3 U_3'' \dots$ projectivische Involution zweiten Ranges können als Glieder einer Schaar projectivischer Involutionen zweiten Ranges betrachtet werden.

Nachdem nöthigenfalls durch Zufügung derselben constanten Gruppe zu allen vorhandenen die Ordnung genügend erhöht ist, nehmen wir aufserhalb des durch beide constituirten Netzes eine Gruppe W von n Elementen an. $U_1' U_2' U_3' \dots$ ist (§ 91) die Projection eines zu $U_1 U_1'' U_2 U_2'' U_3 U_3''$ projectivischen Zeigers $W_1 W_1'' W_2 W_2'' W_3 W_3'' \dots$ von W aus. Im zweiten Falle constituirt derselbe mit $V_1 V_1'' V_2 V_2'' V_3 V_3'' \dots$ eine Schaar, deren Projection auf das Netz, in dem $U_1' U_2' U_3' \dots$ und $V_1 V_1'' V_2 V_2'' V_3 V_3'' \dots$ liegen, den Bedingungen der Aufgabe genügt. Im ersten Falle nimmt man aufserhalb des bisherigen Netzes noch eine Gruppe Z von n Punkten an. $V_1' V_2' V_3' \dots$ ist dann eine Projection von Z aus eines zu $U_1 U_1'' U_2 U_2'' U_3 U_3'' \dots$ projectivischen Zeigers $V_1 V_1'' V_2 V_2'' V_3 V_3'' \dots$ Beide geben einer Involutionsschaar den Ursprung, welche durch das Netzbündel mit W, Z zum Träger in die gesuchte Schaar projicirt wird.

Selbst wenn beide entartete Involutionen nur verschiedene Reihungen derselben Involution ersten Ranges sind, hat der Satz doch einen reellen Inhalt, indem nämlich alle Involutionen der Schaar, die dann sämmtlich entartet sind, dieselben (4) Gruppen mit einander gemeinsam haben.

War man genöthigt, für das Beweisverfahren allen Gliedern der beiden gegebenen Involutionen eine unveränderliche Gruppe hinzuzufügen, so kommt diese auch in allen anderen Involutionen der betrachteten Schaaren vor und kann nachher abgeworfen werden.

§ 93. Eine Involution ersten Ranges gehört mit einer zu ihr projectivischen zweiten Ranges, die von gleicher Ordnung ist und mit ihr demselben Träger angehört, oder mit der Ausartung einer solchen zu einer Schaar, deren übrige Involutionen irgend eine Gruppe A der letzteren entsprechend gemeinsam haben.

Zwei projectivische Involutionen ersten Ranges und $n$ter Ordnung, $U_1 U_2 U_3 \ldots \barwedge V_1 V_2 V_3 \ldots$, die demselben Träger angehören, können zu einer Schaar von Involutionen gerechnet werden, die alle mit ersterer eine Gruppe U_λ und mit letzterer eine ihr nicht entsprechende Gruppe V_μ entsprechend gemeinsam haben.

Der Beweis des letzteren Satzes wird hinreichen. Es seien V_λ und U_μ die den festen Gruppen entsprechenden Glieder je der anderen Involution. Nachdem nöthigenfalls allen Gruppen dieselbe unveränderliche Gruppe hinzugefügt ist, nehmen wir eine Involution W, Z aufserhalb derselben an. Es sei $U_\mu U_\lambda U_1 U_2 U_3 \ldots$ die Projection der Involution zweiten Ranges $W U'_\lambda U'_1 U'_2 U'_3 \ldots$ bezüglich W, so dafs W, U_μ deren Tangenteninvolution in W ist. Entsprechend sei $V_\lambda V_\mu V_1 V_2 V_3 \ldots$ die Projection der Involution zweiten Ranges $Z V'_\mu V'_1 V'_2 V'_3 \ldots$ bezüglich Z, und daher Z, V_λ der letzteren Tangenteninvolution in Z. Die Projection von W, Z aus der durch die Involutionen

$$1)\ U'_\lambda W U'_1 U'_2 U'_3 \ldots \barwedge 2)\ Z V'_\mu V'_1 V'_2 V'_3 \ldots$$

constituirten Schaar $[U'], [V']$ auf das die Involutionen $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ umfassende Netz genügt allen Bedingungen. In ihr treten zuerst $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ auf als Projectionen der Involutionen 1) und 2) von W, Z aus. Denn das Netz zweiter Stufe $W Z U_\nu$ trifft

nach § 81 nur in einer Gruppe das Netz, welches $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ umfaſst; in ihm aber liegt die Involution W, U_ν, welche das genannte Netz in U_ν trifft. Aus anderen Involutionen zweiten Ranges der Schaar entstehen projectivische, welche mit $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ in demselben Netze liegen. Aus den Leitinvolutionen der Schaar entstehen projectivische Leitinvolutionen. Von W und Z gehen aber die Leitinvolutionen W, V_μ und Z, U_λ der Hülfsschaar $[U'], [V']$ aus. Da sie mit W, Z in je einem Netze zweiter Stufe liegen, werden die Gruppen der ersteren auſserhalb W alle in die Gruppe V_μ projicirt. Die W zugehörige Gruppe ist unbestimmt, in der Involution $U_1 U_2 U_3 \ldots$ aber wird V_μ die Gruppe U_μ zugeordnet, welche von dem Tangentialnetz $W U_\mu Z$ bestimmt wird. Ebenso haben alle Involutionen der Schaar die Gruppe U_λ mit $U_1 U_2 U_3 \ldots$ gemeinsam. Bei der Projection von $Z V'_\mu V'_1 V'_2 \ldots$ wird die U_λ zugehörige Gruppe unbestimmt, in der Involution $V_\lambda V_\mu V_1 V_2 V_3 \ldots$ aber wird U_λ die Gruppe V_λ zugeordnet, weil sie von dem Tangentialnetz $W Z V_\lambda$ bestimmt wird.

Die nöthigenfalls beigefügte unveränderliche Gruppe tritt bei allen Involutionen der Schaar auf und kann nun abgelöst werden.

§ 94. Sind $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots \;\overline{\wedge}\; V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ zwei projectivische Involutionen ersten Ranges und $m$ter resp. $n$ter Ordnung, die demselben Träger angehören, so ist

$$U_1 V_1 \,,\; U_2 V_2 \,,\; U_3 V_3 \,,\; U_4 V_4 \,, \ldots$$

eine zu beiden projectivische Involution $(m+n)$ter Ordnung und zweiten Ranges oder die Ausartung einer solchen.

Aus

$$U_1 U_2 U_3 U_\lambda \;\overline{\wedge}\; V_1 V_2 V_3 V_\lambda$$

folgt

$$U_1 U_2 U_3 U_\lambda \;\overline{\wedge}\; V_2 V_1 V_\lambda V_3 \,.$$

Die letzteren Reihen haben nach § 32 eine Gruppe W von $2n$ Coincidenzelementen, die zu V_λ projectivisch die Involution $U_2 V_2 \,, U_1 V_1$ beschreibt, zugleich aber von dem Involutionsbüschel $U_3 V_3 \,, U_\lambda V_\lambda$, das mithin (§ 77) zu jener projectivisch ist, ausgeschnitten wird. Da ebenso das Involutionsbüschel $U_4 V_4, U_\lambda V_\lambda$ zu U_λ projectivisch ist, überdies aber $U_\lambda V_\lambda$ mit $U_1 V_1 \,, U_2 V_2 \,, U_3 V_3$ und $U_4 V_4$ zu einem Netze zweiter Stufe gehört, so

beschreibt $U_\lambda V_\lambda$ eine zu jenen beiden projectivische Involution zweiten Ranges.

Der gemachte Schluſs wird nur dann hinfällig, wenn $U_1 V_1$, $U_2 V_2$, $U_3 V_3$ Gruppen derselben Involution sind. Wird angenommen, daſs keine der Involutionen allen ihren Gruppen gemeinsame Punkte habe, so muſs (§ 75) $m = n$, und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ nur eine andere Aufreihung von $U_1 U_2 U_3 \ldots$ sein. In einem projectivisch bezogenen einförmigen Gebilde entspricht der Reihe $U_1, V_1, U_2, V_2, U_3, V_3, \ldots$ die Reihe $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 \ldots$, welche aus Paaren einer Involution zweiter Ordnung sich zusammensetzt, und andererseits ist auch

$$U_1 V_1, U_2 V_2, U_3 V_3, U_4 V_4, \ldots \;\overline{\wedge}\; A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, A_4 B_4, \ldots$$

Es sei nun in einer Ebene die Punktreihe $C_1 C_2 C_3 C_4 \ldots \overline{\wedge}\; U_1 V_1, U_2 V_2, U_3 V_3, U_4 V_4, \ldots$ angenommen. Man kann auf den Geraden CC_1, CC_2 die Punktepaare A_1', B_1' und A_2', B_2', auf CC_3 den Punkt A_3' so annehmen, daſs auf dem durch diese fünf Punkte gehenden Kegelschnitt

$$A_1', B_1', A_2', B_2', A_3' \;\overline{\wedge}\; A_1, B_1, A_2, B_2, A_3$$

ist. Sind nun A_λ', A_λ und B_λ', B_λ homologe Punkte dieser Reihen, so bilden A_λ' und B_λ' ein Paar der Involution $A_1'B_1', A_2'B_2', A_3'B_3'$ und ihre Verbindungslinie geht durch C. Ferner ist

$$A_1'B_1'; A_2'B_2'; A_3'B_3'; A_\lambda'B_\lambda' \ldots \;\overline{\wedge}\; A_1B_1; A_2B_2; A_3B_3; A_\lambda B_\lambda \ldots \;\overline{\wedge}\; C(C_1; C_2; C_3; C_\lambda \ldots).$$

Andererseits ist die erste Involution projectivisch zu dem sie ausschneidenden Büschel $o_1 o_2 o_3 \ldots o_\lambda$, so daſs o_λ den Punkt C_λ enthält. Bezieht man nun die Punktebene so collinear auf ein Involutionsnetz, daſs

$$C_1, C_2, C_3, \ldots \;\overline{\wedge}\; U_1 V_1, U_2 V_2, U_3 V_3, \ldots$$

ist, so erhält man einen Zeiger, der projectivisch auf die Reihen $A_1' A_2' A_3' A_4' \ldots$ oder auch $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ bezogen ist, und der von einer Gruppe aus in $U_1 V_1, U_2 V_2, U_3 V_3, \ldots$ projicirt wird.

§ 95. Zwei projectivische Involutionen zweiten Ranges haben unendlich viele Elemente entsprechenden Gruppen nur dann gemeinsam, wenn entweder beide von einer dritten Involution zweiten Ranges nur durch Hinzufügung je einer unveränderlichen Gruppe, oder von derselben

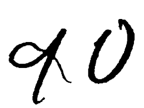
Involution ersten Ranges nur um je eine andere Involution ersten Ranges sich unterscheiden. Alle drei müssen unter einander und zu den gegebenen projectivisch sein. Eine Involution zweiten Ranges kann mit einer projectivischen ersten Ranges nur dann unendlich viele Elemente gemeinsam haben, wenn sie dieselbe als Theil enthält.

Statt einer Involution zweiten Ranges kann auch die Ausartung einer solchen eintreten.

Wir vermehren alle Gruppen von $U_1 U_2 U_3 \dots$ um die Elemente von V_1, und alle Gruppen von $V_1 V_2 V_3 \dots$ um die von U_1. Alsdann können die projectivischen Reihen

$$V_1 U_1, V_1 U_2, V_1 U_3, V_1 U_4 \dots \barwedge U_1 V_1, U_1 V_2, U_1 V_3, U_1 V_4 \dots$$

zunächst Gruppe für Gruppe übereinstimmen. Dies aber tritt dann nur ein, wenn $U_1 U_2 U_3 \dots$ und $V_1 V_2 V_3 \dots$ sich von einer zu beiden projectivischen Involution zweiten Ranges $W_1 W_2 W_3 W_4 \dots$ nur um feste Punktgruppen unterscheiden.



Andernfalls constituiren beide Involutionen eine Schaar. In dieser giebt es, weil den ersteren wenigstens eine Gruppe gemeinsam ist, $(U_1 V_1)$ im Allgemeinen eine zu beiden gegebenen projectivische Involution ersten Ranges $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \dots$, von der jedes Glied Z_λ mit den entsprechenden $V_1 U_\lambda$ und $U_1 V_\lambda$ zu einer Involution gehört. In besonderen Fällen liegt ein bestimmtes Glied mit je zwei entsprechenden in einer Involution. Im ersteren Fall allein können unendlich viele gemeinsame Elemente der drei Reihen

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \dots ; \; V_1 V_2 V_3 V_4 \dots ; \; Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \dots$$

vorhanden sein; der zweite kommt daher hier nicht in Betracht. Letztere Involution ersten Ranges erscheint zuerst mit der Ordnung $m + n$, kann sich aber durch Abstofsung einer unveränderlichen Gruppe auf eine solche niederer Ordnung reduciren.

$U'_1 U'_2 \dots U'_{\lambda-1} U_\lambda \dots$ sei eine beliebige zu $U_1 U_2 \dots U_\lambda$ projectivische Involution ersten Ranges, welche mit letzterer die Gruppe U_λ entsprechend gemeinsam hat. Die beiden Involutionen zweiten Ranges

$Z_\lambda U_1, Z_\lambda U_2, Z_\lambda U_3, \dots Z_\lambda U_\lambda \dots$ und $Z_1 U'_1, Z_2 U'_2, Z_3 U'_3 \dots Z_\lambda U_\lambda, \dots$ (§ 94)

sind zu einander projectivisch, und in ihnen entspricht $Z_\lambda U_\lambda$ sich selbst. Es giebt eine Involution ersten Ranges $W_1 W_2 W_3 \dots$ in der durch beide

bestimmten Schaar, welche alle aufserhalb $Z_\lambda U_\lambda$ vorhandenen gemeinsamen Elemente ebenfalls mit beiden Reihen und daher mit $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ unendlich viele Elemente gemeinsam hat. Nimmt man von beiden Involutionen ihre constanten Gruppen fort, so bleibt dieselbe zu beiden Reihen projectivische Involution $X_2 X_2 X_3 \ldots$ übrig. Bliebe von der zweiten $X_1' X_2' X_3' \ldots$ übrig, und wäre auch nur X_1' von X_1 verschieden, so würden nur die Punkte einer bestimmten Gruppe der Involution $X_1 X_\lambda'$; $X_1' X_\lambda$ entsprechenden Gliedern beider gegebenen Reihen gemeinsam sein. Daher mufs X_1 mit X_1', X_λ mit X_λ' zusammenfallen. Jedes Glied von $U_1, U_2, U_3, U_4 \ldots$ und $V_1, V_2, V_3, V_4 \ldots$ umfafst das entsprechende Glied der zu beiden projectivischen Involution ersten Ranges $X_1, X_2, X_3, X_4 \ldots$ Es werde $[U_\lambda]$ in der Form $X_1 Y_1 ; X_2 Y_2 ; X_3 Y_3 ; X_4 Y_4, \ldots$ geschrieben, und es sei $Y_1 Y_2' Y_3' \ldots$ eine zu $X_1 X_2 X_3 \ldots$ projectivische Involution ersten Ranges, Y_2' aber von Y_2 verschieden. Die beiden projectivischen Involutionen zweiten Ranges

$$X_1 Y_1, X_2 Y_2, X_3 Y_3, X_4 Y_4, \ldots \;\overline{\wedge}\; X_1 Y_1, X_2 Y_2', X_3 Y_3', X_4 Y_4', \ldots$$

bestimmen eine Schaar, in der auch eine Involution ersten Ranges vorkommt, die sich nothwendig nur um ein constantes Glied A von $X_1 X_2 X_3 \ldots$ unterscheidet. Irgend zwei entsprechende Gruppen von $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 \ldots$ und $Y_1 Y_2' Y_3' Y_4' \ldots$ liegen daher mit A je in einer Involution. Wird nun für Y_λ' ein anderes Glied Y_λ'' der Involution Y_λ, Y_λ' eingeführt, statt $Y_1 Y_2' Y_3' Y_4' \ldots$ die projectivische Involution $Y_1 Y_2'' Y_3'' Y_4'' \ldots$, so liegt sie mit dem Gebilde $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ hinsichtlich einer zweiten Gruppe B von Y_λ, Y_λ' perspectivisch. $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 \ldots$ ist daher das Erzeugnifs zweier perspectivischer Involutionsbüschel und folglich eine zu ihnen, mithin auch zu $X_1 X_2 X_3 \ldots$ projectivische Involution ersten Ranges. Ebenso ist $V_1 V_2 V_3 \ldots$ von der Form $X_1 Z_1, X_2 Z_2, X_3 Z_3, \ldots,$ und $Z_1 Z_2 Z_3 \ldots$ eine zu $X_1 X_2 X_3 \ldots$ projectivische Involution ersten Ranges.

§ 96. Soll eine Involution zweiten Ranges unendlich viele Gruppen mit mehrfachen Elementen enthalten, so mufs entweder in jedem Gliede dieselbe Gruppe mit mehrfachen Elementen liegen, oder eine beliebige unveränderliche Gruppe, und das entsprechende doppelt zählende Glied einer projectivischen Involution ersten Ranges.

Von einer etwa vorhandenen unveränderlichen Gruppe sehen wir ab. Ferner brauchen wir uns nur mit der nicht entarteten Involution zu befassen (§ 34b). Ein beliebiges $n$faches Element D^n werde angenommen, und für jede Gruppe des Netzes $U_1 U_2 U_3 U_4$, in dem die Involution liegt, die Gruppe $U_1', U_2', U_3', U_4', \ldots$ der mehrfachen Elemente aufgesucht. Die einer Involution des Netzes zugehörenden Gruppen bilden eine zu dieser projectivische Involution $(n-1)$ter Ordnung (§ 76), alle Gruppen überhaupt also ein zu dem gegebenen collineares Netz $(n-1)$ter Ordnung. Nur wenn D^n dem Netze angehört, entspricht den von ihm ausgehenden Involutionen je nur eine Gruppe mehrfacher Punkte. Das zweite Netz reducirt sich in diesem Fall auf ein Netz erster Stufe.

Falls in ihm noch $(n-1)$fache Elemente vorkommen, giebt es in dem Involutionsnetz noch andere $n$fache Elemente aufser D^n. Solcher Elemente aber giebt es (§ 48) höchstens zwei, falls $n-1 \geqq 2$ ist, jedoch unendlich viele, wenn $n-1 = 1$, also $n = 2$ ist. Da sonach in einem Netz von einer Ordnungszahl n, die höher als 2 ist, höchstens 3 $n$fache Elemente auftreten, können wir ein solches aufserhalb des Netzes wählen. An die Stelle der Involution $U_1 U_2 U_3 U_4 U_5 \ldots$ zweiten Ranges tritt dann die projectivische $U_1' U_2' U_3' U_4' U_5' \ldots$. Enthält eine Gruppe der ersteren ein $p$faches Element, so ist es ein $(p-1)$faches Element in der entsprechenden Gruppe (§ 56) und daher sind überhaupt alle mehrfachen Elemente entsprechenden Gruppen der beiden Reihen gemeinsam. Unendlich viele solche Gruppen können mithin (§ 95) nur auftreten, wenn beide Involutionen eine zu ihnen projectivische Involution ersten Ranges $W_1 W_2 W_3 W_4 W_5$ gemein haben. Nur einzelne dieser Gruppen können (§ 34b) mehrfache Elemente zeigen. Alle übrigen kommen nach der Bedeutung von $U_1' U_2' U_3' U_4' \ldots$ sicher doppelt in $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ vor. Deshalb ist die untersuchte Involution zweiten Ranges von gerader Ordnungszahl und von der Form $W_1 W_1$; $W_2 W_2$; $W_3 W_3$; $W_4 W_4$; $\ldots$ Die Gruppen von $U_1' U_2' U_3' \ldots$, setzen sich aus denen von $W_1 W_2 W_3 \ldots$ und den homologen einer anderen projectivischen Involution ersten Ranges $W_1' W_2' W_3' \ldots$ zusammen.

Im Falle $n = 2$ nehmen wir das zweifache Element D^2 auf der Involution zweiten Ranges an. Ihre Gruppen $U_1, U_2, U_3, U_4 \ldots$ werden durch ein projectivisches Involutionsbüschel $D^2(U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots)$ projicirt. Die zweiten Doppelpunkte aller dieser Involutionen bilden eine zu $U_1 U_2$

$U_3 U_4 \ldots$ projectivische Punktreihe. Von hier aus aber können wir wie vorher weiter schliefsen.

§ 97. Durch ein beliebiges Element des Trägers einer Involution zweiten Ranges gehen im Allgemeinen zwei verschiedene Gruppen der Involution zweiten Ranges. Die Elemente des Trägers, durch welche nur eine Gruppe geht, können nur dann in unendlicher Anzahl auftreten, wenn die Involution von der besonderen Gestalt $X_1 X_1$, $X_2 X_2$, $X_3 X_3$, $X_4 X_4, \ldots$ ist, wo $X_1 X_2 X_3 X_4 \ldots$ eine Involution ersten Ranges ist.

Die gesuchten Elemente gehören allen Gruppen der Tangenteninvolutionen an, welche in den sie enthaltenden Gruppen der Involution zweiten Ranges stattfinden. Statt dessen richten wir die Frage nach den Elementen, die zwei benachbarten Gruppen der Involution zugleich angehören, und zwar entsprechenden Gruppen der beiden projectivischen Reihen $A B U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $A B V_1 V_2 V_3 \ldots$, die auf der Involution angenommen werden; wenn V_1 bei U_1 liegt, so rücken $V_2, V_3, \ldots$ an U_2, $U_3, \ldots$ heran, und die Involutionen U_1, V_1; U_2, V_2; U_3, V_3; U_λ, V_λ; ... gehen in die Tangenteninvolutionen in den Gruppen $U_1, U_2, U_3, U_\lambda \ldots$ über. Nun haben aber die Reihen $A B U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $A B V_1 V_2 V_3 \ldots$, da sie n i c h t wesentlich identisch sein können, nur dann unendlich viele Elemente gemeinsam, wenn sie eine zu beiden projectivische Involution ersten Ranges $W_1' W_2' W_3' \ldots$ anthalten. Daneben enthält jede von ihnen noch eine andere projectivische Reihe $W_1 W_2 W_3 \ldots$ resp. $W_1'' W_2'' W_3'' \ldots$ Je näher nun $U_1 U_2 U_3 \ldots$ bei $V_1 V_2 V_3 \ldots$ liegt, desto näher liegen auch die drei projectivischen Reihen $W_1' W_2' W_3' \ldots$, $W_1 W_2 W_3 \ldots$, $W_1'' W_2'' W_3'' \ldots$ bei einander, da nämlich

$$W_1 W_1', W_2 W_2', W_3 W_3', \ldots \barwedge W_1' W_1'', W_2' W_2'', W_3' W_3'', \ldots$$

ist. Daher mufs an der Grenze die Reihe in eine doppelt zählende Involution ersten Ranges übergehen, wenn keine unveränderliche Gruppe allen Gliedern angehört.

§ 98. Zwei projectivische Involutionen $U_1 U_2 U_3 \ldots \barwedge V_1 V_2 V_3 \ldots$ zweiten Ranges desselben Trägers und der Ordnungen m und n, die nicht eine zu beiden projectivische dritte Involution ersten oder zweiten Ranges

gemeinsam haben, besitzen höchstens $2m+2n$ Coincidenzstellen. Sollten einzelne unveränderliche Elemente beiden gleichzeitig angehören, so sollen diese vorher abgeschieden werden.

Eine Involution $r$ter Ordnung und zweiten Ranges $W_1 W_2 W_3 \ldots$ hat mit einer projectivischen Involution $s$ter Ordnung und ersten Ranges $Z_1 Z_2 Z_3 \ldots$ im Allgemeinen und höchstens $2s+r$ Coincidenzstellen, wenn nicht beide dieselbe Involution ersten Ranges als einen Theil umfassen.

Unter einer Stelle einer Involution wird jedes Element ihres Trägers verstanden, dem als nähere Bestimmung zugefügt ist, welchem Gliede derselben es angehören soll. Ein allen Gruppen einer Involution zweiten Ranges gemeinsames Element gehört also unendlich vielen, ein anderes im Allgemeinen und höchstens zwei verschiedenen Stellen an.

Enthalten alle Gruppen einer Involution zweiten Ranges einzelne unveränderliche Elemente, die nicht zugleich der anderen Reihe angehören, so sind in jedem im Allgemeinen zwei verschiedene gemeinsame Stellen vereinigt.

Wir wollen voraussetzen, dafs die Reihen zweiten Ranges und der genannten Ordnungen nicht in Theile zerfallen. Dann kann man (§§ 96 und 97) zwei entsprechende Gruppen U_1, V_1 finden, die kein Element mit einander gemein haben, aus je m resp. n verschiedenen Elementen bestehen, von denen noch überdies jedes zwei verschiedene Gruppen seiner Involution zweiten Ranges bestimmt. Dies vorausgesetzt, betrachten wir die projectivischen Involutionen zweiten Ranges, $(m+n)$ter Ordnung.

1) $U_1 V_1, U_1 V_2, U_1 V_3, U_1 V_4, \ldots \barwedge$ 2) $V_1 U_1, V_1 U_2, V_1 U_3, V_1 U_4, \ldots$

Sie bestimmen eine Schaar, deren sämmtliche Involutionen (§ 90) durch alle gemeinsamen Stellen der ersteren beiden hindurchgehen und keine anderen Stellen mit beiden gemeinsam haben können. Mit $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ haben sie daher die zugleich der entsprechenden Reihe $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ angehörigen Stellen, ferner die $2n$ in U_1 gelegenen Stellen der ersteren gemeinsam. n der letzteren entfallen auf die Gruppe U_1, und jedes Element derselben gehört noch zu einer anderen Stelle der Reihe 2) und repräsentirt eine Coincidenzstelle der Reihen 1) und 2), weil es allen Gruppen von 1) gemeinsam ist. In einem Gliede der Schaar wird das $U_1 V_1$ zugehörige Glied unbestimmt, und dasselbe enthält aufserdem eine Involu-

tion $(m+n)$ter Ordnung und ersten Ranges $X_1 X_2 X_3 \ldots \barwedge U_1 U_2 U_3 \ldots$, die mit den Reihen 1) und 2) alle ihre Stellen aufserhalb $U_1 V_1$ gemeinsam hat. Mit $U_1 U_2 U_3 \ldots$ hat sie daher erstens die gesuchten und zweitens die n Stellen gemeinsam, die ihre Elemente noch in U_1 haben. Wenn wir den zweiten Theil des Satzes zunächst voraussetzen, so haben $X_1 X_2 X_3 \ldots$ und $U_1 U_2 U_3 \ldots$ im Ganzen $(m+n)2+n$ Stellen gemeinsam, und da die n in U_1 gelegenen Stellen der Aufgabe fremd sind, so haben $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ im Allgemeinen und höchstens $2m+2n$ gemeinsame Stellen.

Im Fall beide Involutionen entartet sind, geschieht die Beziehung zwischen

$$U_1' U_2' U_3' \ldots \text{ und } V_1' V_2' V_3' \ldots,$$

indem man zwei projectivische Reihen $A_1 A_2 A_3 \ldots$, $B_1 B_2 B_3 \ldots$ in Involutionen zweiter Ordnung zerlegt und auf diese die Gebilde $U_1' U_2' U_3' \ldots$, $V_1' V_2' V_3' \ldots$, als Involutionen ersten Ranges betrachtet, projectivisch bezieht. In diesem Falle gehört je eine Gruppe der einen im Allgemeinen zwei verschiedenen Gruppen der anderen zu. Die erstere gehört den beiden Elementen eines Paares der in $A_1 A_2 A_3 \ldots$ angenommenen Involution zweiter Ordnung zu. Denselben entsprechen in $B_1 B_2 B_3 \ldots$ zwei Elemente, die im Allgemeinen nicht zu einem Paar der in ihr angenommenen Involution gehören, und denen daher zwei verschiedene Gruppen in $V_1' V_2' V_3' \ldots$ entsprechen. In diesem Fall kann ganz wie oben geschlossen werden, dafs beide Reihen höchstens $2m+2n$ Elemente gemeinsam haben. Sind nun aber die beiden in $A_1 A_2 A_3 \ldots \barwedge B_1 B_2 B_3 \ldots$ angenommenen Involutionen zweiter Ordnung homologe Gebilde derselben, so gehört zu jeder Gruppe U_λ' nur eine Gruppe V_λ', und die beiden Reihen sind zu einander projectivisch. Als solche haben sie (§ 32) $m+n$ Coincidenzelemente. Werden aber beide als Entartungen projectivischer Involutionen zweiten Ranges betrachtet, so entspricht jede Gruppe einem Paar einer Involution zweiten Ranges, und es finden sich daher in jedem der $m+n$ Elemente 2 Coincidenzstellen.

Um die zweite Aufgabe zu lösen, ergänzen wir die Involution $s$ter Ordnung und ersten Ranges durch eine von ihr verschiedene projectivische Involution $p$ter Ordnung und ersten Ranges $X_1 X_2 X_3 \ldots$ Auf die

beiden projectivischen Involutionen zweiten Ranges

$$X_1 Z_1 W_1, X_1 Z_1 W_2, X_1 Z_1 W_3, \ldots \barwedge W_1 X_1 Z_1, W_1 X_2 Z_2, W_1 X_3 Z_3, \ldots$$

kann man die vorige Überlegung anwenden und mithin eine projectivische Involution $Y_1 Y_2 Y_3 \ldots$ $(r+s+p)$ter Ordnung und ersten Ranges finden, die mit den vorigen Involutionen alle ihre Coincidenzelemente aufserhalb $X_1 Z_1 W_1$ gemeinsam hat. Mit $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$ hat sie im Ganzen $r+s+p+s = r+2s+p$ Elemente gemeinsam. Unter ihnen finden sich neben den gesuchten noch die Stellen der Reihe $[Z]$, welche ihre Elemente in $X_1 Z_1$ haben, ohne doch Z_1 anzugehören. Solcher Stellen erhält man aber für jedes Element von X_1 eine, in Allem also p verschiedene. Mithin haben $W_1 W_2 W_3 \ldots$ und $Z_1 Z_2 Z_3 \ldots$, wie behauptet wurde, mit einander $2s+r$ im Allgemeinen verschiedene Stellen gemeinsam. Zerfallen nun zwei projectivische Involutionen ersten resp. zweiten Ranges in Theile, in feste Gruppen und zu einander projectivische Involutionen ersten Ranges, so hat man zuerst die Coincidenzstellen jedes Bestandtheils der einen Reihe mit jedem der anderen aufzusuchen und alle diese Zahlen zu addiren. Auch in diesem Falle bestätigt sich daher die Behauptung.

Dritter Abschnitt.

Die Involutionen μten Ranges. §§ 99—119.

Bekanntlich stehen die Raumcurven dritter Ordnung den Kegelschnitten am nächsten, was Einfachheit der Eigenschaften und Leichtigkeit ihrer Entwickelung betrifft. Wir werden daher wohl thun, in einem dreifachen Involutionsnetz $U_1 U_2 U_3 U_4$ dasjenige Gruppengebilde zu betrachten, welches dem genannten Raumgebilde entspricht. Dieses letztere kann nun aber entstehen mit Hülfe von drei projectivischen Ebenenbüscheln, deren Träger BC, CA, AB die Verbindungslinien dreier Curvenpunkte A, B, C sind. Wird noch festgesetzt, dafs in D, E und F je drei zusammengehörige Ebenen sich schneiden, so erzeugen die drei Büschel die einzige durch die sechs Punkte A, B, C, D, E, F mögliche Curve dritter Ordnung. Dazu erhalten wir ein Analogon, wenn wir die drei Büschel von Netzen zweiter Stufe mit den Trägern U_2, U_3; U_3, U_1; U_1, U_2 projecti-

visch so beziehen, dafs die nach U_4, U_5, U_6 führenden Tripel zusammengehören. Das so entstehende Gebilde ist, wie bewiesen werden kann, durch seine sechs Gruppen $U_1, U_2, U_3, \ldots U_6$ eindeutig bestimmt und hat mit jedem Netze zweiter Stufe, welches in $U_1 U_2 U_3 U_4$ enthalten ist, im Allgemeinen und höchstens drei Gruppen gemeinsam. Da alle durch ein Element des Trägers gehenden Gruppen zu einem Netze zweiter Stufe gehören, so ist das Gebilde vom dritten Range; es gehören im Allgemeinen und höchstens drei Gruppen zu ihm, die ein beliebiges Element enthalten. Wir bezeichnen das Gebilde als eine Involution dritten Ranges und der $m$ten Ordnung, wenn die einzelnen Gruppen der dreifachen Mannigfaltigkeit m Elemente enthalten.

Ohne bei der Discussion dieser Reihen zu verweilen, gehen wir sogleich zu den Involutionen μten Ranges über, deren Definition, da wir in dem Besitz einer μfachen Mannigfaltigkeit sind, auf ganz natürliche Weise sich ergeben wird. Wir setzen dabei die Theorie der Involutionen $(\mu-1)$ten Ranges als vollständig bekannt voraus, halten es jedoch für unnöthig, auch hier, wie im Capitel 2, diejenigen Sätze ausdrücklich aufzuzählen, auf welche wir uns berufen.

§ 99. Durch irgend $\mu+3$ Gruppen $U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots U_\mu, U_{\mu+1}, U_{\mu+2}, U_{\mu+3}$ eines Netzes μter Stufe und $m$ter Ordnung $(m \geqq \mu)$, von denen keine $\mu+1$ demselben Netze $(\mu-1)$ter Stufe angehören, ist eine Involution $m$ter Ordnung und μten Rnnges eindeutig bestimmt. Alle Netzbüschel, welche irgend $\mu-1$ Gruppen der Involution mit einer festen Anordnung gegebener Gruppen derselben verbinden, sind unter einander projectivisch. Zu ihnen allen ist die Involution perspectivisch. Bezieht man die μ Büschel mit den Trägern

$$U_2 U_3 \ldots U_\mu, U_3 U_4 \ldots U_\mu U_1, U_4 \ldots U_\mu U_1 U_2, \ldots U_1 U_2 \ldots U_{\mu-1}$$

so projectivisch, dafs $U_{\mu+1}, U_{\mu+2}, U_{\mu+3}$ je einem Satze von μ entsprechenden Netzen gemeinsam sind, so treffen sich in jeder Gruppe der Involution μ entsprechende Netze $(\mu-1)$ter Stufe der μ Büschel.

Mit keinem Netze $(\mu-1)$ter Stufe hat die Involution mehr als μ Gruppen gemeinsam.

Der Satz ist für den Werth 2 von μ richtig (§ 87). Wir leiten ihn aus dem entsprechenden, für $\mu-1$ vorausgesetzten, ab[28].

Keine $\alpha+2$ der gegebenen Gruppen können demselben Netz αter Stufe angehören; im anderen Falle könnten sie mit irgend $\mu-\alpha-1$ Gruppen durch ein Netz $(\mu-1)$ter Stufe verbunden werden (§ 81). Die drei Gruppen $U_{\mu+1}, U_{\mu+2}, U_{\mu+3}$ liegen daher nicht in einer Involution. Von den μ Netzbüscheln treten mithin keine zwei in die besondere perspectivische Beziehung. Perspectivisch, und so, dafs in $U_{\mu+1}$ und $U_{\mu+2}$ entsprechende Netze sich treffen, lassen sich nämlich die Büschel $U_1 U_3 \dots U_\mu$ und $U_2 U_3 \dots U_\mu$ nur beziehen, indem man beide zur Involution $U_{\mu+1}$, $U_{\mu+2}$ perspectivisch setzt. Alsdann nämlich entspricht das Netz $U_1 U_2 U_3 \dots U_\mu$, das die Involution $U_{\mu+1}, U_{\mu+2}$ nur in einer Gruppe trifft, sich selbst. Sie erzeugen daher das Netz $U_3 U_4 \dots U_{\mu+2}$ $(\mu-1)$ter Stufe, dem der Voraussetzung entgegen auch $U_{\mu+3}$ angehörte. Nun ist keine Gruppe des Netzes $U_1 U_2 \dots U_\mu$ den μ Trägern $(\mu-2)$ter Stufe

$$U_2 U_3 \dots U_\mu \ ; \ U_3 U_4 \dots U_\mu U_1 \ ; \ U_4 \dots U_1 U_2 ; \dots \ U_1 U_2 \dots U_{\mu-1}$$

gemeinsam. Denn mit dem ersten Träger können die $\mu-1$ anderen nur die $\mu-1$ Netze $(\mu-3)$ter Stufe $U_3 U_4 \dots U_\mu$, $U_4 U_5 \dots U_\mu U_1, \dots, U_2 U_3 \dots U_{\mu-1}$ gemein haben. Diesen allen müfste folglich eine Gruppe gemeinschaftlich sein. Dieselbe würde aber dann auch den $\mu-3$ Netzen $(\mu-4)$ter Stufe $U_4 U_5 \dots U_\mu$; $U_5 U_6 \dots U_\mu U_3 ; \dots U_3 U_4 \dots U_{\mu-1}$, und endlich den drei Involutionen $U_{\mu-1}, U_\mu ; U_\mu, U_{\mu-2} ; U_{\mu-2}, U_{\mu-1}$ angehören müssen. Diese aber sind sicher von einander verschieden, und daher enthalten die Träger der μ Büschel keine gemeinsame Gruppe. Irgend $\mu-1$ von ihnen haben nur eine Gruppe mit einander gemein, so die $\mu-1$ letzten die Gruppe U_1; hätten sie noch eine andere Gruppe U' und daher die Involution U', U_1 gemeinsam, so würde allen μ Trägern diejenige Gruppe gleichzeitig angehören, die U', U_1 auf $U_2 U_3 \dots U_\mu$ ausschneidet. Von jedem Satze zusammengehöriger Netze $(\mu-1)$ter Stufe durch die genannten μ Träger kann nun höchstens eines, sagen wir das erste, mit $U_1 U_2 U_3 \dots U_\mu$ zusammenfallen; die $\mu-1$ übrigen können, da ihre Träger nur U_1 gemeinsam haben, nur eine Involution U_1', U_1 gemeinsam haben. Dieselbe trifft das erste Netz in der einzigen Gruppe, welche dem Satze von Netzen $(\mu-1)$ter Stufe gemeinsam ist.

Es mögen nun $U_1, U_2 ; U_1, U_3 ; U_1, U_4 ; \dots U_1, U_\mu ; U_1, U_{\mu+1} ;$ $U_1, U_{\mu+2} ; U_1, U_{\mu+3}$ ein beliebiges $(\mu-1)$faches Netz in den Gruppen V_2, $V_3, V_4, \dots V_{\mu+3}$ treffen, von denen keine μ demselben Netze $(\mu-2)$ter

Stufe angehören. Aus den $\mu-1$ projectivischen Netzbüscheln mit den Trägern $U_1 U_3 U_4 \ldots U_\mu$; $U_1 U_4 U_5 \ldots U_\mu U_2$; $U_1 U_5 U_6 \ldots U_\mu U_2 U_3$; ... $U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu-1}$ entstehen projectivische Netzbüschel mit den Trägern $V_3 V_4 \ldots V_\mu$; $V_4 V_5 \ldots V_\mu V_2$, $V_5 V_6 \ldots V_\mu V_2 V_3$; ... $V_2 V_3 \ldots V_{\mu-1}$. Sie erzeugen eine Involution $(\mu-1)$ten Ranges $V_2 V_3 \ldots V_\mu V_{\mu+1} V_{\mu+2} V_{\mu+3} \ldots V'_\mu$. Wenn wir für den Werth $\mu-1$ unseren Satz voraussetzen, so ist dieselbe zu allen Büscheln mit den Trägern $V_3 V_4 \ldots V_{\mu-2} V'_\mu$ perspectivisch. An diesen Trägern bestimmt eine gegebene Anordnung der Gruppen der Involution $(\mu-1)$ten Ranges Büschel, welche zu den $\mu-1$ vorigen projectivisch sind. Daher mufs eine Folge von Gruppen der gegebenen Involution an allen Trägern $U_1 U_3 U_4 \ldots U_{\mu-1} U'_\mu$ projectivische Büschel bestimmen. Da keine μ Gruppen der zweiten Involution in demselben Netze $(\mu-2)$ter Stufe liegen, so kann auch U_1 nicht mit irgend μ anderen Gruppen der untersuchten Involution in einem Netze $(\mu-1)$-ter Stufe liegen. Anstatt aus $U_1, U_2, U_3, \ldots U_\mu$; $U_{\mu+1}, U_{\mu+2}, U_{\mu+3}$ kann also die Involution auch aus den Gruppen $U_1, U_2, U_3, \ldots U_{\mu-1}, U'_\mu$; $U_{\mu+1}$, $U_{\mu+2}, U_{\mu+3}$ bestimmt werden. Denn keine $\mu+1$ dieser Gruppen liegen in einem Netze $(\mu-1)$ter Stufe, und es sind, da $U_2, U_3, U_4, \ldots U_{\mu-1}$ die Rolle von U_1 oder U_μ übernehmen können, die μ Büschel projectivisch, welche die Involution von den Trägern

$$U_2 U_3 \ldots U_{\mu-1} U'_\mu \,;\; U_3 U_4 \ldots U_{\mu-1} U'_\mu U_1 \,;\; \ldots\; U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu-1}$$

aus projiciren.

Da nun U'_μ genau die Rolle spielen kann, die vorher U_1 einnahm, so folgt nun zuerst, dafs überhaupt keine $\mu+1$ Gruppen der Involution demselben Netze μter Stufe angehören. Bei mehrmaliger Wiederholung des Verfahrens ergiebt sich, dafs an irgend $\mu-1$ festen Gruppen der Involution μten Ranges dieselbe ein Netzbüschel bestimmt, das zu den gegebenen projectivisch ist.

Eine Involution, welche die Gruppen $U_1, U_2, U_3, \ldots U_{\mu+3}$ enthält, kann durch μ projectivische Büschel mit den Trägern $U_2 U_3 \ldots U_\mu$, $U_3 \ldots U_\mu U_1, \ldots U_1 U_2 \ldots U_{\mu-1}$ erzeugt werden und ist daher durch die gegebenen Gruppen eindeutig bestimmt.

§ 100. Hülfssatz.

Irgend zwei projectivische Büschel von Netzen $(\mu-1)$ter Stufe einer μfachen Mannigfaltigkeit erzeugen ein Netz $(\mu-1)$ter Stufe, wenn

ihre Träger demselben Netze $(\mu-1)$ter Stufe angehören, das sich selbst entspricht. Hält man ein Paar homologer Netze fest, so bewegt sich das Erzeugnifs um das ihnen gemeinsame Netz $(\mu-2)$ter Stufe und zwar projectivisch zu dem beweglichen Netze des zweiten Büschels, welches irgend einem festen des ersten Büschels zugeordnet wird.

Die beiden Träger haben, da sie einem Netze $(\mu-1)$ter Stufe angehören, ein Netz N $(\mu-3)$ter Stufe gemeinsam. In dem Netze μter Stufe nehmen wir ein Netz zweiter Stufe an, welches jeden der gegebenen Träger in je einer Gruppe U und V, das Netz $(\mu-3)$ter Stufe aber überhaupt nicht trifft. Die projectivischen Involutionsbüschel $U(W_1, W_2, W_3, \ldots)$ und $V(W_1, W_2, W_3, \ldots)$, in welchen es den Netzbüscheln begegnet, sind perspectivisch, da ihre gemeinsame Involution U, V sich selbst entspricht; $W_1, W_2, W_3, \ldots$ sind daher Gruppen derselben Involution. Homologe Netze der gegebenen Büschel begegnen sich in Netzen $(\mu-2)$-ter Stufe, die diese Gruppen mit N bestimmen. Das Erzeugnifs dieser Büschel ist das Netz aus N, W_1 und W_2. Der Rest des Satzes ergiebt sich leicht, weil z. B. die Büschel $W_1(W_2 W_2' W_2'' \ldots)$ und $V(W_2 W_2' W_2'' \ldots)$, um die Involution U_1, W_2 zu erzeugen, projectivisch sein müssen.

§ 101. Enthält der Träger eines Büschels von Netzen $(\mu-1)$ter Stufe $\mu-\alpha$ verschiedene Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu-\alpha}$ der Involution μten Ranges, so trifft jedes einzelne dieselbe noch in α anderen Gruppen. An irgend $\mu-1$ festen Gruppen $B_1, B_2, \ldots B_{\mu-1}$ der Involution bestimmen dieselben eine Gruppe einer Netzinvolution αter Ordnung, deren Elemente nämlich die von $B_1 B_2 \ldots B_{\mu-1}$ ausgehenden Netze $(\mu-1)$ter Stufe sind. Die Gruppe ändert sich projectivisch mit dem ersteren Netzbüschel.

Insbesondere hat jedes Netz $(\mu-1)$ter Stufe mit der Involution μten Ranges μ im Allgemeinen verschiedene Gruppen gemeinsam, und es kommt jedes Element des Trägers in μ Gruppen der Involution vor.

Für den Werth 1 von α ist der Satz im § 99 bewiesen; allgemein geschieht dies durch einen Schlufs von $\alpha-1$ auf α. Der Träger des Netzbüschels sei durch die $\mu-\alpha$ Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu-\alpha}$ der Involution μten Ranges und $\alpha-1$ Gruppen $W_1, W_2, \ldots W_{\alpha-1}$ aufserhalb derselben bestimmt; derselbe habe keine anderen Gruppen als die ersteren mit der Involution gemeinsam.

Zwei beliebige Gruppen X_α und Y_α mögen mit $U_1, U_2, \dots U_{\mu-\alpha}$, $W_1, W_2, \dots W_{\alpha-1}$ Netze (U) und (V) $(\mu-1)$ter Stufe bestimmen, die noch in $X_1, X_2, \dots X_{\alpha-1}$ und $Y_1, Y_2, \dots Y_{\alpha-1}$ der Involution μten Ranges begegnen; ferner sei W ein Netz $(\mu-1)$ter Stufe, das neben X_α, Y_α, $U_1, U_2, \dots U_{\mu-\alpha}$ noch $\alpha-2$ beliebige Gruppen $Z_1, Z_2, \dots Z_{\alpha-2}$ enthält. Die beiden Netzbüschel $(U), (W)$ und $(V), (W)$ können so bezogen werden (§ 100), dafs sie eines der gegebenen Netze erzeugen. Sie bestimmen aber auf der Involution μten Ranges zwei projectivische Involutionen $(\alpha-1)$ter Ordnung. Den Gruppen $X_1 X_2 \dots X_{\alpha-1}$ und $Z_1 Z_2 \dots Z_{\alpha-1} Y_\alpha$, welche durch (U) und (W) ausgeschnitten werden, entsprechen hierbei stets die Gruppen $Y_1 Y_2 \dots Y_{\alpha-1}$ und $Z_1 Z_2 \dots Z_{\alpha+2} X_\alpha$, die (V) und (W) ausschneiden.

Beide Gebilde sind perspectivisch zu Involutionen $(\alpha-1)$ter Ordnung, deren Glieder aus je $\alpha-1$ Netzen $(\mu-1)$ter Stufe durch $\mu-1$ beliebige Gruppen $B_1, B_2, \dots B_{\mu-1}$ der Involution μten Ranges bestehen. Diese Involutionspaare haben genau $2(\alpha-1)$ Coincidenzgruppen resp. Coincidenznetze. Die beiden Netzgebilde haben eine Gruppe der Netzinvolution $[B_1 B_2 \dots B_{\mu-1}](X_1 X_2 \dots X_\alpha; Y_1 Y_2 \dots Y_\alpha)$ mit einander gemein und daneben die $\alpha-2$ festen Gruppen, welche nach $Z_1, Z_2, \dots Z_{\alpha-2}$ führen (§ 33). Läfst man das erste Netz $(\mu-1)$ter Stufe um seinen (U) und (V) gemeinsamen Träger $U_1 U_2 \dots U_{\mu-\alpha} W_1 W_2 \dots W_{\alpha-1}$ sich drehen, so bewegt sich zu ihm projectivisch (§ 100) das Netz (V_1) des Büschels (V), (W), welches einem festen Netze (U_1) von $(U), (W)$ zugehört. (V_1) bestimmt aber auf der Involution μten Ranges die Gruppen der zweiten Reihe, welche nach und nach einer festen der ersten Reihe zugeordnet werden. Es bewegt sich daher die an $B_1 B_2 B_3 \dots B_{\mu-1}$ bestimmte Gruppe der Netzinvolution projectivisch zu dem ausschneidenden Netze des gegebenen Büschels.

§ 102. In jeder Gruppe U_1 einer Involution μten Ranges giebt es eine Tangenteninvolution, die ihr nur in dieser einen Gruppe begegnet, aber mit $\mu-3$ beliebigen Gruppen derselben den Träger eines Büschels bestimmt, welches zur Involution μten Ranges projectivisch ist. Begegnet ein Netz $(\mu-1)$ter Stufe der Involution μten Ranges in weniger als μ Gruppen, so mufs dasselbe die Tangenteninvolution in wenigstens einer derselben enthalten.

Wenn eine Involution mit irgend $\mu - 3$ Gruppen der Involution μten Ranges Träger von Büscheln bestimmt, die zu dieser perspectivisch sind, so mufs dieselbe in einer Gruppe V_1 der Involution $(\mu - 1)$ten Ranges $V_2 V_3 V_4 \ldots V_{\mu+3}$ treffen, in die von U_1 aus die gegebene Involution μten Ranges $U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu+3}$ projicirt wird. Nur wenn

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots U_{\mu+3} \ldots \,\overline{\wedge}\, V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots V_{\mu+3} \ldots$$

gesetzt wird, erhalten wir eine Involution U_1, V_1, die nicht in noch einer zweiten Gruppe die gegebene Involution trifft.

Die Tangenteninvolution in U_1 bestimmt daher an jedem Träger $U_1 U_2' U_3' \ldots U_{\mu-1}'$ ein Netz $(\mu - 1)$ter Stufe, welches bei einer projectivischen Erzeugung der Involution μten Ranges dem Netze $U_1 U_2 U_3 \ldots U_\mu$ des Trägers $U_2 U_3 U_4 \ldots U_\mu$ zugehört. Jedes Netz $(\mu - 1)$ter Stufe, das aufser U_1 die Tangenteninvolution in U_2 enthält, wird daher in ein Netz $(\mu - 2)$ter Stufe projicirt, das die Tangenteninvolution in V_2 enthält. Wenn nun das Netz $(\mu - 1)$ter Stufe der Involution nur in $U_1, U_2'', U_3'', \ldots U_{\mu-\alpha}''$ begegnet und nicht die Tangenteninvolution der Involution in U_1 enthält, so kann das Netz $(\mu - 2)$ter Stufe, in welchem es dem Träger der Involution $(\mu - 1)$ten Ranges begegnet, nur $\mu - \alpha - 1$ Gruppen $V_2', V_3', \ldots V_{\mu-\alpha-1}'$ mit derselben gemeinsam haben. Wenn wir voraussetzen, dafs letzteres Netz die Tangenteninvolution in wenigstens einem der V' enthält, so mufs das Netz $(\mu - 1)$ter Stufe die Tangenteninvolution in wenigstens einer der Gruppen $U_1, U_2', U_3', \ldots$ enthalten. Der Satz ist also durch einen Schlufs von $(\mu - 1)$ auf μ erwiesen, da er für den ersten Fall $\mu = 2$ gilt.

§ 103. Zwei projectivische Involutionen μten Ranges $U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu+2} \ldots$ und $V_1 V_2 \ldots V_{\mu+2} \ldots$ sind homologe Gebilde collinearer Netze μter Stufe.

Denn für homologe Gruppen U und V ist (§ 99)

$$(U_2 U_3 \ldots U_\mu)(U_1 U_{\mu+1} U_{\mu+2} U) \;\overline{\wedge}\; (V_2 V_3 \ldots V_\mu)(V_1 V_{\mu+1} V_{\mu+2} V) .$$
$$(U_3 U_4 \ldots U_1)(U_2 U_{\mu+1} U_{\mu+2} U) \;\overline{\wedge}\; (V_3 V_4 \ldots V_1)(V_2 V_{\mu+1} V_{\mu+2} V) .$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(U_1 U_2 \ldots U_{\mu-1})(U_\mu U_{\mu+1} U_{\mu+2} U) \;\overline{\wedge}\; (V_1 V_2 \ldots V_{\mu-1})(V_\mu V_{\mu+1} V_{\mu+2} V) .$$

Diese Beziehungen begründen aber auch (§ 85) die allgemeine collineare Beziehung.

$$U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu+2} U \text{ coll. } V_1 V_2 V_3 \ldots V_{\mu+2} V.$$

§ 104. Um eine gegebene Involution μten Ranges auf ein einförmiges Gebilde projectivisch zu beziehen, kann man noch drei Elementen des letzteren ihre entsprechenden Gruppen beliebig zuweisen. Um auf ein einförmiges Gebilde eine Involution eines gegebenen μfachen Netzes zu beziehen, kann man noch irgend $\mu + 2$ Elementen $a_1, a_2, \ldots a_{\mu+2}$ des ersteren $\mu + 2$ Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu+2}$, von denen keine $\mu + 1$ demselben Netze $(\mu - 1)$ter Stufe zugehören, beliebig zuweisen.

Denn es ist im letzteren Fall

$$\begin{array}{l} a_1 a_{\mu+1} a_{\mu+2} a \;\overline{\wedge}\; (U_2 U_3 \ldots U_\mu)(U_1 U_{\mu+1} U_{\mu+2} U) \;. \;\; . \\ a_2 a_{\mu+1} a_{\mu+2} a \;\overline{\wedge}\; (U_3 U_4 \ldots U_1)(U_2 U_{\mu+1} U_{\mu+2} U) \;. \;\; . \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_\mu a_{\mu+1} a_{\mu+2} a \;\overline{\wedge}\; (U_1 U_2 \ldots U_{\mu-1})(U_\mu U_{\mu+1} U_{\mu+2} U) \;. \end{array}$$

Gäbe es zwei verschiedene Gebilde der verlangten Art, so könnten zwei collineare Netze μter Stufe $\mu + 2$ Gruppen, von denen keine $\mu + 1$ demselben Netz $(\mu - 1)$ter Stufe angehören, gemeinsam haben, ohne identisch zu sein.

§ 105. Wird von irgend ν Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_\nu$ einer Involution $m$ter Ordnung und μten Ranges aus dieselbe auf ein Netz $(\mu - \nu)$ter Stufe projicirt, so erhält man eine zu jener projectivische Involution $(\mu - \nu)$ten Ranges, falls das letztere Netz mit $U_1 U_2 \ldots U_\nu$ keine Gruppe gemeinsam hat.

Jede Involution $(\mu - \nu)$ten Ranges kann man, falls ihre Ordnungszahl genügend grofs ist, in solcher Weise darstellen. Die ν Gruppen kann man beliebig aufserhalb ihres Netzes annehmen und beliebigen Gruppen der Involution zuweisen; ferner kann man noch zu irgend $\mu - \nu + 1$ Gruppen der letzteren Involution ihre entsprechenden in den sie projicirenden Netzen νter Stufe beliebig nehmen.

Irgend $\mu - \nu$ Netze $(\mu - 1)$ter Stufe, welche U mit $U_1, \ldots U_\nu$ und je $\mu - \nu - 1$ anderen Gruppen verbinden, haben das von $U_1 U_2 \ldots U_\nu$ nach U führende Netz νter Stufe mit einander gemeinsam. Diese $\mu - \nu$ Büschel sind zur Involution perspectivisch und schneiden daher auf dem

Netze $(\mu-\nu)$ter Stufe $\mu-\nu$ Büschel von Netzen $(\mu-\nu-1)$ter Stufe aus. Dieselben erzeugen eine Involution $(\mu-\nu)$ten Ranges, welche die Projection der gegebenen ist.

Es schneide für den zweiten Theil des Satzes das Involutionsnetz $(\mu-\nu)$ter Stufe, und also auch die Involution $(\mu-\nu)$ten Ranges die Involution μten Ranges in den Gruppen $U_{\nu+1}, U_{\nu+2}, \ldots U_{\mu+1}$, und es mögen die Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_\nu$, welche den projicirenden Träger bestimmen, den Gliedern $U_1', U_2', U_3', \ldots U_\nu'$ der Involution $(\mu-\nu)$ten Ranges entsprechen. Wenn die beiden Netze $U_1 U_2 \ldots U_\nu$ und $U_{\nu+1} \ldots U_{\mu+1}$ keine Gruppen gemeinsam haben, was nur bei $m \geqq \mu$ der Fall sein kann, so liegen keine $\mu+1$ der Gruppen $U_1', U_1, U_2, U_3, \ldots U_\nu, U_{\nu+1}, U_{\nu+2}, \ldots U_{\mu+1}$ in einem Netze μter Stufe. Wenn man eine Involution t_1 in $U_1 U_2 \ldots U_\nu U_1'$ von U_1 ausgehend wählt, so wird dieselbe mit keinen $(\mu-1)$ der Gruppen in einem Netze $(\mu-1)$ter Stufe liegen. Kann man eine Involution μten Ranges so legen, dafs sie t_1 zur Tangente hat, und dafs die Projectivität stattfindet

$$U_{\nu+1} U_{\nu+2} \ldots U_{\mu+1} U_1 U_2 \ldots U_\nu \;\overline{\wedge}\; U_{\nu+1} U_{\nu+2} \ldots U_{\mu+1} U_1' U_2' \ldots U_\nu',$$

so ist die Aufgabe gelöst. Werden nämlich die Gruppen $U_1'', U_2'', \ldots U_\nu''$ von den νfachen Netzen ausgeschnitten, die aufser $U_1, U_2, \ldots U_\nu$ noch die Tangenteninvolutionen in $U_1, U_2, \ldots U_\nu$ enthalten, so entsprechen sie den $U_1, U_2, \ldots U_\nu$; man hat daher

$$U_1'' U_2'' U_3'' \ldots U_\nu'' U_{\nu+1} \ldots U_{\mu+1} \ldots \;\overline{\wedge}\; U_1' U_2' U_3' \ldots U_\nu' U_{\nu+1} \ldots U_{\mu+1} \ldots$$

Fällt nun U_1' mit U_1'' zusammen, so werden von selbst $U_2', U_3', \ldots U_\nu'$ und $U_2'', U_3'', \ldots U_\nu''$ identisch (§ 104). Nach demselben Paragraph hat man nur zu setzen, um die irgend einer Gruppe U' entsprechende U zu finden

$$(U_1 U_3 U_4 \ldots U_\mu)(U_2 U_{\mu+1} t_1 U \ldots) \;\overline{\wedge}\; U_2' U_{\mu+1} U_1' U' \ldots$$
$$(U_1 U_4 U_5 \ldots U_2)(U_3 U_{\mu+1} t_1 U \ldots) \;\overline{\wedge}\; U_3' U_{\mu+1} U_1' U' \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1})(U_\mu U_{\mu+1} t_1 U \ldots) \;\overline{\wedge}\; U_\mu U_{\mu+1} U_1' U' \ldots$$

Endlich ist noch erforderlich

$$(U_2 U_3 \ldots U_\mu)(U_1 U_{\mu+1} U \ldots) \;\overline{\wedge}\; U_1' U_{\mu+1} U' \ldots$$

Diese Bedingungen sind aber, wie nothwendig, auch hinreichend. Die ersteren ergeben für das einem U' zugehörende U eine bestimmte von

U_1 ausgehende Involution. Haben wir auf ihr, was die letzte Beziehung noch zuläfst, das ihm entsprechende U willkürlich gewählt, so ist jedem anderen U' sein U zweifellos zugeordnet. Ganz analog hätten wir zu verfahren, wenn von der Involution μten Ranges anstatt $U_{\nu+1}, U_{\nu+2}, \ldots U_{\mu+1}$ selbst Gruppen gegeben wären, welche von $U_1 U_2 \ldots U_\nu$ aus in die letzteren projicirt werden.

§ 106. Verbindet man jede Gruppe einer Involution μten Ranges mit einem Netze N $(\nu-1)$ter Stufe, das keine Gruppe derselben enthält, durch Netze νter Stufe, so schneiden dieselben auf einem den Träger des Bündels nicht enthaltenden Netze $(\mu-\nu)$ter Stufe eine ausgeartete Involution μten Ranges aus, die vermöge der eigentlichen Involution μten Ranges, ihres Zeigers, auf andere Gebilde bezogen werden kann.

In jedem Netze μter Stufe, welches den Träger $(\mu-\nu)$ter Stufe einer ausgearteten Involution enthält, kann man unendlich viele Zeiger derselben annehmen, welche zu dem ersten projectivisch sind.

Falls die Ordnungszahl m für die folgende Deduction nicht grofs genug ist, füge man allen Gruppen des gegebenen Zeigers dieselbe constante Gruppe bei.

Das neue Netz μter Stufe habe aufserhalb des $(\mu-\nu)$fachen Trägers der Involution keine Gruppe mit dem gegebenen μfachen Netze gemeinsam. Wir können dann in dem Gesammtnetz ein $(\nu-1)$faches Netz N'' annehmen, das mit keinem der beiden μfachen eine Gruppe gemeinsam hat. Projiciren wir von hier aus (durch νfache Netze) die ganze Figur auf das neue Netz, so geht der gegebene Zeiger in eine projectivische Involution μten Ranges über. Jede Gruppe der ausgearteten Involution und ihres Trägers geht in sich selbst über, N geht in ein anderes $(\nu-1)$-faches Netz N' über. Jede Gruppe der ausgearteten Involution liegt mit den beiden Netzen N, N' und zwei entsprechenden Gruppen der projectivischen Zeiger in zwei νfachen Netzen.

Die ausgearteten Involutionen μten Ranges verhalten sich zu den allgemeinen, wie die rationale ebene Curve dritter Ordnung zur Raumcurve. Projiciren wir von einem $(\mu-2)$fachen Netze aus auf eine Involution, so erhalten wir jeder einzelnen Gruppe der letzteren μverschiedene ihres Zeigers involutorisch zugeordnet (§ 101)[29].

Unter den behandelten Involutionen befinden sich auch solche, deren Ordnung r kleiner als ihr Rang μ ist. Sie werden erhalten, wenn allen Gruppen des Netzes $(\mu - \nu)$ter Stufe $m - r$ Punkte gemeinsam sind. Es läfst sich, als Specialfall des vorigen, zeigen, dafs eine solche Involution mit Hülfe eines Netzes μter Ordnung sich herstellen läfst, und dafs man die $\mu - r$ Punkte, die mit ihm zugleich bei dem Procefs der Ausartung erscheinen, ganz willkürlich festsetzen kann. Ist nämlich G die Zusatzgruppe von $m - r$ Punkten, so kann man zunächst allen Gliedern des Zeigernetzes noch die Gruppe H von $\mu - r$ Punkten zusetzen, alsdann aber in dem Netze μter Stufe, $(m + \mu - r)$ter Ordnung, dessen Gruppen G gemeinsam ist, einen Zeiger der Involution finden, die sich von der zu betrachtenden um GH unterscheidet. G kann nun, da es auch allen Gliedern des Zeigernetzes gemeinsam ist, abgeworfen werden; dann aber erscheint die Involution $r$ter Ordnung bei der Ausartung mit H zusammen.

§ 107. Irgend eine ausgeartete Involution νten Ranges kann man als Projection einer zu ihrem ursprünglichen Zeiger projectivischen Involution μten Ranges auffassen, deren Trägernetz ganz aufserhalb desjenigen der gegebenen Involution liegt. Der Träger des Projectionsbündels ist ein Netz μter Stufe, welches in $\mu - \nu$ Gruppen die zu bildende Involution trifft, die beliebigen Gruppen der gegebenen zugehören.

Wenn die Ordnungszahl m kleiner als $\nu + \mu$ ist, so mufs dieselbe durch Hinzufügung einer unveränderlichen Gruppe zu allen gegebenen hinreichend erhöht werden.

Zuerst ist die Involution I $m$ter Ordnung, νten Ranges in einem Netze N $(\nu - \alpha)$ter Stufe enthalten. Wir können sie als Projection einer allgemeinen Involution II νten Ranges von einem Netze N_1 $(\alpha - 1)$ter Stufe aus betrachten.

Bestimmen nun irgend $\mu - \nu$ Gruppen $V_1, V_2, \ldots V_{\mu-\nu}$ aufserhalb des Netzes νter Stufe ein Netz N_2 $(\mu - \nu - 1)$ter Stufe, das keine Gruppe mit jenem gemeinsam hat, so können wir II als Projection einer Involution III μten Ranges von N_2 aus betrachten. Dieselbe kann nach § 105 so bestimmt werden, dafs die Gruppen $V_1, V_2, \ldots V_{\mu-\nu}$ in ihr liegen und in vorgeschriebene Gruppen der Involution νten Ranges projicirt werden.

Die beiden Netze N_1 und N_2 bestimmen zusammen ein Netz $(N_1 N_2)$ $(\mu + \alpha - \nu - 1)$ter Stufe (§ 82). Zwei zusammengehörige von N_1 und N_2 ausgehende Netze αter und $(\mu - \nu)$ter Stufe liegen, weil sie in einer Gruppe von II sich treffen, in einem Netze $(\mu + \alpha - \nu)$ter Stufe. Daher ist die entartete Involution I eine Projection von $(N_1 N_2)$ aus der Involution III μten Ranges, welche zu ihrem ursprünglichen Zeiger projectivisch ist. Jetzt wird noch ein Zusatznetz N_3 $(\nu - \alpha)$ter Stufe angenommen, welches das vorhandene Netz μter Stufe nicht trifft. Wir können nun durch $(N_1 N_2)$ ein Netz μter Stufe legen, welches weder mit N noch mit N_3 eine Gruppe gemeinsam hat. Auf dieses denken wir uns die Involution III projicirt; wir erhalten eine Involution IV μten Ranges, die wieder zum gegebenen Zeiger projectivisch ist. Eine Gruppe von IV und die zugehörige von I liegen mit dem Netze $(N_1 N_2 N_3)$ $(\mu + \alpha - \nu - 1 + \nu - \alpha + 1)$ter oder μter Stufe in einem Netze $(\mu + \alpha - \nu + \nu - \alpha + 1)$ter oder $(\mu + 1)$ter Stufe. Die Involution IV ist die im Satze angezeigte, und $(N_1 N_2 N_3)$ das in ihm bezeichnete Projectionsnetz.

Zusatz. Es ist nun leicht einzusehen, dafs in jedem Netze μter Stufe, welches N nicht trifft, ein zu dem ursprünglichen projectivischer Zeiger μten Ranges angenommen werden kann. Man kann nämlich die gesammte vorliegende Anordnung von Netzen auf das Netz $(\mu + \nu - \alpha + 1)$ter Stufe projiciren, welches durch N und das neue Netz bestimmt wird. Diese Beziehung kann man so einrichten, dafs die Projection des Zeigers, den wir hergestellt hatten, in das neue Netz μter Stufe fällt.

§ 108. Zwei projectivische Involutionen $[U]$ und $[V]$ $m$ter Ordnung und μten Ranges desselben Trägers, an deren Stelle auch Ausartungen derselben treten können, sind Glieder einer Schaar projectivischer Involutionen μten Ranges

$$[U] \barwedge [V] \barwedge [W] \barwedge [Z] \barwedge \ldots ,$$

von denen entsprechende Gruppen in projectivischen Involutionen, den Leitinvolutionen der Schaar, angeordnet liegen. Zu ihnen allen wird die Schaar projectivisch gesetzt. Haben die gegebenen Gebilde eine Gruppe entsprechend gemein, so wird in einem Gliede der Schaar ihre zugehörige Gruppe unbestimmt. Dasselbe reducirt sich im Allgemeinen auf eine

Involution $(\mu-1)$ten Ranges, doch kann in besonderen Fällen der Rang noch weiter herabsinken.

Die gegebenen Involutionen mögen für sich in Netzen $\nu_1$ter und $\nu_2$ter Stufe, zusammen aber in einem Netze N νter Stufe liegen; n sei die gemeinschaftliche Ordnung dieser Gebilde, durch Hinzufügung derselben unveränderlichen Gruppe zu allen gegebenen genügend gesteigert. $[U]$ und $[V]$ sind Entartungen allgemeiner Involutionen μten Ranges $[U']$ und $[V']$ von den Netzen N_1 und N_2 aus. Diese Netze μter Stufe sollen weder unter sich (§ 107), noch mit dem Netze N eine Gruppe gemeinsam haben. Endlich sei N' das Netz $(2+2\mu+\nu)$ten Ranges, in dem alle betrachteten Gruppen sich befinden. Wir können $[U]$ und $[V]$ auch als Projectionen der Gebilde $[U']$ und $[V']$ von $(N_1 N_2)$ aus auf N betrachten. Denn jedes Netz $(2\mu+2)$ter Stufe des Bündels $(N_1 N_2)$ trifft N nur in der einen Gruppe, welche das vorher durch N_1 oder N_2 gelegte Netz $(\mu+1)$ter Stufe ausschnitt. Die beiden projectivischen Involutionen μten Ranges $[U']$ und $[V']$ sind homologe Bestandtheile (§ 103) collinear bezogener Netze (U) und (V) ((U) coll. (V)). Diese geben (§ 86) einer Schaar $(U'),(V')$ collinearer Netze $(U'),(V'),(W'),(Z'),\ldots$ den Ursprung, und einen Theil derselben bildet eine Schaar $[U'],[V']$ projectivischer Involutionen μten Ranges $[U'],[V'],[W'],[Z'],\ldots$, deren homologe Gruppen in projectivischen Leitinvolutionen liegen. Von $(N_1 N_2)$ aus projicirt sich die Schaar in eine im Satze angezeigte. Die Leitinvolutionen, welche $(N_1 N_2)$ nicht treffen, projiciren sich in projectivische Involutionen, welche homologe Gruppen enthalten. Eine Leitinvolution aber, welche $(N_1 N_2)$ in einer Gruppe G_0' begegnet, wird in eine einzige Gruppe G_0 des Netzes N projicirt, die daher $[U]$ und $[V]$ entsprechend gemeinsam ist. Durch G_0' geht ein Netz (W') der Schaar $(U'),(V')$ und eine Involution $[W']$ der Schaar $[U'],[V']$. Sie wird von $(N_1 N_2)$ aus in eine Involution $(\mu-1)$ten Ranges projicirt, deren Zeiger zu denen der gegebenen Involutionen projectivisch ist. Der Gruppe G_0' gehört, da sie kein Netz $(2\mu+1)$ter Stufe des Bündels $(N_1 N_2)$ bestimmen kann, jede beliebige Gruppe zu, speciell in der Involution $(\mu-1)$ten Ranges aber diejenige, welche an $(N_1 N_2)$ die Berührungsinvolution von $[W']$ in G_0' bestimmt. In besonderen Fällen, wenn (W') ein ganzes Netz mit $(N_1 N_2)$ gemeinsam hat, und in diesem mehrere Gruppen von $[W']$ liegen, kann an die Stelle der Involution

$(\mu-1)$ten Ranges eine solche niedrigeren Ranges treten. Ob irgend eine Involution der Schaar $[U], [V]$ entartet ist, hängt davon ab, ob das Netz μter Stufe, welches die entsprechende Involution von $[U'], [V']$ enthält, das Netz $(N_1 N_2)$ trifft, sei es in einer einzelnen Gruppe, sei es in einem Netze. Sämmtliche Involutionen der Schaar $[U], [V]$ sind also dann, aber auch nur dann entartet, wenn ein Theil der Leitinvolutionen der Netzschaar $(U'), (V')$ vollständig in $(N_1 N_2)$ liegt. Dies kann sicher nur eintreten, wenn $[U]$ und $[V]$ beide entartet sind.

§ 109. Zwei projectivische Involutionen $[U]$ und $[V]$ $m$ter Ordnung, $(\mu-\alpha)$ten Ranges und $(\mu-\beta)$ten Ranges, oder Ausartungen solcher können als Bestandtheile einer Schaar betrachtet werden, deren Involutionen mit ersterer alle die Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_\beta$, mit letzterer die jenen nicht zugehörigen Gruppen $V_{\beta+1}, V_{\beta+2}, \ldots V_{\beta+\alpha}$ gemeinsam haben.

Da wir allen Gruppen eine Anzahl unveränderlicher Elemente hinzufügen können, so können wir m grösser als 2μ voraussetzen. Es seien $U_{\beta+1}, U_{\beta+2}, \ldots U_{\beta+\alpha}$ und $V_1, V_2, \ldots V_\beta$ die Gruppen, welche den gegebenen je in der anderen Involution entsprechen. Setzen wir die Bezeichnung des vorigen Paragraphen voraus, so muss $[U']$ in α Gruppen $U'_{\beta+1}, U'_{\beta+2}, \ldots U'_{\beta+\alpha}$ das Netz N_1, und $[V']$ das Netz N_2 in β Gruppen $V'_1, V'_2, \ldots V'_\beta$ treffen. $[U']$ und $[V']$ sind zu den ursprünglichen Zeigern projectivisch, und zwar können (§§ 105 und 107) $U'_{\beta+1}, U'_{\beta+2}, \ldots U'_{\beta+\alpha}$ den Gruppen desselben entsprechend gesetzt werden, aus denen $U_{\beta+1}, U_{\beta+2}, \ldots U_{\beta+\alpha}$ entstehen, $V'_1, V'_2, \ldots V'_\beta$ aber den Gruppen, aus denen $V_1, V_2, \ldots V_\beta$ entstehen. Die Leitinvolutionen

$$U'_1, V'_1; U'_2, V'_2; \ldots U'_\beta, V'_\beta; U'_{\beta+1}, V'_{\beta+1}; \ldots U'_{\beta+\alpha}, V'_{\beta+\alpha}$$

der Schaar $[U'], [V']$ enthalten alle je eine Gruppe des Netzes $(N_1 N_2)$ und werden daher in je eine Gruppe des Netzes N projicirt. Es treffen, da $U'_1, U'_2, \ldots U'_\beta$ in $U_1, U_2, \ldots U_\beta$ projicirt werden, die ersteren β Netze $(2\mu+2)$ter Stufe in diesen Gruppen, die anderen ebenso die zweite Involution in $V_{\beta+1}, V_{\beta+2}, \ldots V_{\beta+\alpha}$. Die Projectionen von $V'_1, V'_2, \ldots V'_\beta$ sind an und für sich unbestimmt, weil aber die Involution $[V']$ in jenen Punkten durch die nach $V_1, V_2, \ldots V_\beta$ gehenden Netze berührt wird, gehören diese Gruppen speciell den Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_\beta$ in der zweiten der gegebenen Involutionen zu. Ebenso entsprechen $U'_{\beta+1}, U'_{\beta+2}, \ldots$

$U'_{\beta+\alpha}$ die Gruppen $U_{\beta+1}, U_{\beta+2}, \ldots U_{\beta+\alpha}$ in der ersten Involution, dagegen die Gruppen $V_{\beta+1}, V_{\beta+2}, \ldots V_{\beta+\alpha}$ in allen übrigen.

Es können in der Schaar noch andere entartete Involutionen niedrigeren Ranges vorkommen, jedoch nur dann, wenn die gegebenen Involutionen Gruppen entsprechend gemeinsam haben.

War es nöthig, vor Beginn des gegebenen Beweises die Gruppen der gegebenen Involutionen alle um dieselben unveränderlichen Punkte zu vermehren, so erscheinen diese, da je die entsprechenden Gruppen in Leitinvolutionen liegen, auch bei allen anderen Involutionen, und können daher nachträglich wieder abgelöst werden.

§ 110. Die Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges $U_1 U_2 U_3 \ldots, V_1 V_2 V_3 \ldots, W_1 W_2 W_3 \ldots, \ldots$ einer Schaar haben mit einer festen, zu ihnen projectivischen Involution ersten Ranges und $n$ter Ordnung $X_1 X_2 X_3 \ldots$ die Gruppen einer Involution $(\mu n + m)$ter Ordnung gemeinsam.

Man betrachte statt der gegebenen die folgenden Gebilde

1) $X_1 U_1, X_1 U_2, X_1 U_3 \ldots; X_1 V_1, X_1 V_2, X_1 V_3 \ldots;$
$X_1 W_1, X_1 W_2, X_1 W_3 \ldots; \ldots$

2) $U_1 X_1, U_1 X_2, U_1 X_3 \ldots; V_1 X_1, V_1 X_2, V_1 X_3 \ldots;$
$W_1 X_1, W_1 X_2, W_1 X_3 \ldots; \ldots$

Die Reihen 1) bilden eine Schaar projectivischer Involutionen $(m+n)$ter Ordnung und μten Ranges; die Reihen 2) dagegen gehören zu einer Schaar zu jenen projectivischer Involutionen $(m+n)$ter Ordnung und ersten Ranges (§ 73). Beide Schaaren haben eine Leitinvolution $U_1 X_1, V_1 X_1, W_1 X_1, \ldots$ entsprechend gemeinsam.

Wir nehmen, nachdem nöthigenfalls durch Hinzufügung einer unveränderlichen Gruppe zu allen gegebenen die Ordnung hinreichend vergrößert war, vier Hülfsnetze M_1, N_1, M_2, N_2 $(m+n)$ter Ordnung und μter Stufe an. Dieselben sollen ein Netz O $(4\mu+3)$ter Stufe constituiren, und dieses soll das Netz S, in dem die gegebenen Gebilde liegen, nicht treffen. Die beiden ersten Glieder der Reihe 1) kann man nun als Projectionen von M_1 und N_1 aus den eigentlichen Involutionen μten Ranges und $(m+n)$ter Ordnung

3) $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_3 \mathfrak{U}_4 \ldots \mathfrak{U}_{\mu+2} \mathfrak{U}_{\mu+3} \ldots$ und $\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 \mathfrak{V}_3 \mathfrak{V}_4 \ldots \mathfrak{V}_{\mu+2} \mathfrak{V}_{\mu+3} \ldots$

betrachten (§ 107). Wir setzen voraus, dafs diese beiden Involutionen in Netzen liegen, die S und daher auch einander nicht treffen. Die Hülfsschaar, welche beide Involutionen μten Ranges eindeutig bestimmen, wird von $(M_1 N_1)$ aus in eine der in Betracht kommenden Schaaren projicirt. Sollten $[U]$ und $[V]$ zu mehreren Schaaren gehören, so entsteht doch jede einzelne, also auch die gegebene, in dieser Art. Es entspreche dabei der Leitinvolution $X_1 U_\lambda, X_1 V_\lambda, X_1 W_\lambda, \ldots$ die projectivische $\mathfrak{U}_\lambda, \mathfrak{V}_\lambda, \mathfrak{W}_\lambda, \ldots$, so dafs aus dem Gliede $\mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2 \mathfrak{W}_3 \mathfrak{W}_4 \ldots$ der Schaar 3) das dritte Glied der Schaar 1) entsteht.

Entsprechend darf man die beiden ersten Glieder der Schaar 4) als Projectionen von M_2 und N_2 aus zweier projectivischer Involutionen μten Ranges, $(m+n)$ter Ordnung

$$\mathfrak{U}_1' \mathfrak{U}_2' \mathfrak{U}_3' \ldots \mathfrak{U}_{\mu+2}' \mathfrak{U}_{\mu+3}' \ldots \; ; \; \mathfrak{V}_1' \mathfrak{V}_2' \mathfrak{V}_3' \ldots \mathfrak{V}_{\mu+2}' \mathfrak{V}_{\mu+3}' \qquad 4)$$

betrachten. Wir setzen voraus, dafs die Netze, in denen sie liegen, mit S, und daher auch unter einander keine Gruppe gemeinsam haben. $\mathfrak{U}_2'$, $\mathfrak{U}_3', \ldots \mathfrak{U}_\mu'$ sollen in M_2, $\mathfrak{V}_2', \mathfrak{V}_3', \ldots \mathfrak{V}_\mu'$ aber in N_2 liegen. Da dann $\mathfrak{U}_2', \mathfrak{V}_2'$; $\mathfrak{U}_3', \mathfrak{V}_3'$; $\ldots \mathfrak{U}_\mu', \mathfrak{V}_\mu'$ vollständig in dem Netze $(M_2 N_2)$ gelegen sind, so werden von hier aus auch alle übrigen Glieder der Schaar 4) in Involutionen ersten Ranges projicirt, die der Schaar 2) angehören. Dabei ist

$$\mathfrak{U}_\lambda', \mathfrak{V}_\lambda', \mathfrak{W}_\lambda', \ldots \;\overline{\wedge}\; U_1 X_\lambda, V_1 X_\lambda, W_1 X_\lambda, \ldots$$

Von dem Netze O $(4\mu+3)$ter Stufe aus werden gleichzeitig die Schaaren 3) und 4) in diejenigen 1) und 2) projicirt. Man kann nun die beiden Netze $(2\mu+1)$ter Stufe, in denen die projectivischen Schaaren 3) und 4) liegen, in einer Weise so collinear beziehen, dafs je zwei entsprechende Glieder derselben einander zugehören. Man setze nämlich

$$\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \ldots \mathfrak{U}_{\mu+1} \mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 \ldots \mathfrak{V}_{\mu+1} \mathfrak{W}_{\mu+2} \text{ coll. } \mathfrak{U}_1' \mathfrak{U}_2' \ldots \mathfrak{U}_{\mu+1}' \mathfrak{V}_1' \mathfrak{V}_2' \ldots \mathfrak{V}_{\mu+1}' \mathfrak{W}_{\mu+2}'.$$

Keine $2\mu+2$ der links stehenden und keine $2\mu+2$ der rechts stehenden Gruppen gehören demselben Netze 2μter Stufe an. Daher ist die collineare Beziehung eindeutig bestimmt, und es gehören die Netze $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \ldots \mathfrak{U}_{\mu+1}$ und $\mathfrak{U}_1' \mathfrak{U}_2' \ldots \mathfrak{U}_{\mu+1}'$, sowie $\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 \ldots \mathfrak{V}_{\mu+1}$ und $\mathfrak{V}_1' \mathfrak{V}_2' \ldots \mathfrak{V}_{\mu+1}'$ einander zu. Der einzigen Involution, die $\mathfrak{W}_{\mu+2}$ mit zwei Gruppen $\mathfrak{U}_{\mu+2}$ und $\mathfrak{V}_{\mu+2}$ (§ 82) von $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \ldots \mathfrak{U}_{\mu+1}$ und $\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 \ldots \mathfrak{V}_{\mu+1}$ verbindet, gehört die einzige Involution zu, welche $\mathfrak{W}_{\mu+2}'$ mit den entsprechenden Gliedern

$\mathfrak{U}'_{\mu+2}$ und $\mathfrak{V}'_{\mu+2}$ verbindet (§ 82). Daher entsprechen (§ 85) einander die collinearen Netze

$$\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 \dots \mathfrak{U}_{\mu+1}\mathfrak{U}_{\mu+2} \dots \text{ coll. } \mathfrak{U}'_1\mathfrak{U}'_2 \dots \mathfrak{U}'_{\mu+1}\mathfrak{U}'_{\mu+2} \dots \text{ oder } (U) \text{ coll. } (V)$$

und die darin enthaltenen projectivischen Involutionen μten Ranges $[\mathfrak{U}]$ und $[\mathfrak{U}']$; ebenso sind die collinearen Netze $(\mathfrak{V})$ und $(\mathfrak{V}')$ und die darin enthaltenen projectivischen Involutionen μten Ranges $[\mathfrak{V}]$ und $[\mathfrak{V}']$ homologe Gebilde. Dem einzigen (§ 86) von $\mathfrak{W}_{\mu+2}$ ausgehenden Netze μter Stufe $\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3 \dots \mathfrak{W}_{\mu+2}$, welches jede Involution $\mathfrak{U}_\lambda, \mathfrak{V}_\lambda$ in einer Gruppe trifft, entspricht das einzige von $\mathfrak{W}'_{\mu+2}$ ausgehende Netz gleicher Art. Da überhaupt die projectivischen Involutionen $\mathfrak{U}_\lambda\mathfrak{V}_\lambda\mathfrak{W}_\lambda\mathfrak{Z}_\lambda \dots$ und $\mathfrak{U}'_\lambda\mathfrak{V}'_\lambda \mathfrak{W}'_\lambda\mathfrak{Z}'_\lambda \dots$ einander entsprechen, so sind wirklich die Schaaren 3) und 4) homologe Gebilde der betrachteten collinearen Netze $(\mathfrak{U}\mathfrak{V})$ und $(\mathfrak{U}'\mathfrak{V}')$. Nach § 86 wird aber durch diese beiden eine Schaar collinearer Netze $(2\mu+1)$ter Stufe

5) $$(\mathfrak{U}\mathfrak{V}) \text{ coll. } (\mathfrak{U}'\mathfrak{V}') \text{ coll. } (\mathfrak{U}''\mathfrak{V}'') \text{ coll. } (\mathfrak{U}'''\mathfrak{V}''') \dots$$

definirt, von der die projectivischen Schaaren collinearer Netze μter Stufe

$$(\mathfrak{U})(\mathfrak{U}')(\mathfrak{U}'') \dots ; \ (\mathfrak{V})(\mathfrak{V}')(\mathfrak{V}'') \dots ; \ (\mathfrak{W})(\mathfrak{W}')(\mathfrak{W}'') \dots$$

Bestandtheile sind.

Nun liegen aber von den drei Leitinvolutionen

$$\mathfrak{U}_1, \mathfrak{V}_1, \mathfrak{W}_1, \mathfrak{Z}_1 \dots \barwedge \mathfrak{U}'_1, \mathfrak{V}'_1, \mathfrak{W}'_1, \mathfrak{Z}'_1 \dots \barwedge U_1X_1, V_1X_1, W_1X_1, Z_1X_1 \dots$$

je drei entsprechende Gruppen mit O in demselben Netze $(4\mu+4)$ter Stufe und daher treffen alle Involutionen $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}'_1; \mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}'_1, \mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}'_1; \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}'_1; \dots$ das Netz O $(4\mu+3)$ter Stufe in je einer Gruppe $\mathfrak{U}''_1, \mathfrak{V}''_1, \mathfrak{W}''_1, \mathfrak{Z}''_1$. Da sie dem Netze dritter Stufe $\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}'_1\mathfrak{V}'_1$ und dem Netze $(4\mu+5)$ter Stufe $(O\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1)$ gleichzeitig angehören, so liegen $\mathfrak{U}''_1, \mathfrak{V}''_1, \mathfrak{W}''_1, \mathfrak{Z}''_1 \dots$ in einer Involution der Schaar $\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1\mathfrak{W}_1\mathfrak{Z}_1 \dots, \mathfrak{U}'_1\mathfrak{V}'_1\mathfrak{W}'_1\mathfrak{Z}'_1 \dots$ Sie bilden folglich homologe Bestandtheile (§ 86) dreier Netze $(\mathfrak{U}\mathfrak{V}), (\mathfrak{U}'\mathfrak{V}'), (\mathfrak{U}''\mathfrak{V}'')$ der Schaar 5). Von O aus werden daher $[\mathfrak{U}''], [\mathfrak{V}''], [\mathfrak{W}''], \dots$ in projectivische Involutionen $(m+n)$ter Ordnung, $(\mu-1)$ten Ranges einer Schaar, etwa in die Involutionen

6) $$U''_1U''_2 \dots U''_{\mu+3} \dots, \ V''_1V''_2 \dots V''_{\mu+3} \dots, \ W'_1W'_2 \dots W'_{\mu+3} \dots, \dots$$

projicirt, von denen jede mit den beiden entsprechenden Gliedern der Schaaren 1) und 2) alle Coincidenzpunkte aufserhalb $U_1X_1, V_1X_1, W_1X_1, \dots$

resp. gemeinsam hat. Daher haben sie mit $X_1 X_2 X_3 \ldots$ alle die und keine anderen Punkte gemeinsam, welche den Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges mit $X_1 X_2 X_3 \ldots$ gemeinsam sind. Man kann nun in derselben Weise weiter schliefsen. Die gesuchten Punktgruppen sind auch Coincidenzgruppen der projectivischen Involutionen $(m+2n)$ter Ordnung, $(\mu-2)$ten Ranges einer bestimmten Schaar mit $X_1 X_2 X_3 \ldots$, und sie sind endlich einer Schaar projectivischer Involutionen $(m+(\mu-1)n)$ter Ordnung, ersten Ranges mit $X_1 X_2 X_3 \ldots$ gemeinsam. Die letzteren aber haben nach § 74 mit $X_1 X_2 X_3 \ldots$ die einzelnen Glieder einer Involution $(m+\mu n)$-ter Ordnung, ersten Ranges gemein. Damit ist der Lehrsatz bewiesen.

Wenn bei einer Bestimmungsweise eine Coincidenzgruppe von $m+\mu n$ verschiedenen Punkten der beiden projectivischen Reihen $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $X_1 X_2 X_3 \ldots$ sich ergiebt, so ist dieselbe natürlich davon unabhängig, welche Gruppe von $X_1 X_2 X_3 \ldots$ die bevorzugte Rolle übernimmt, welche wir X_1 zugewiesen hatten, und welchen Zeiger von den überhaupt zugelassenen wir wählen, wofern wir es mit einer entarteten Involution μten Ranges zu thun haben. Für die Folge ist es ungemein wichtig, dafs die bezügliche Coincidenzgruppe auch dann zweifellos feststeht, wenn mehrfache Punkte in ihr auftreten.

Bei ihrer Ermittelung kommen aufser $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_3 \ldots$ und $\mathfrak{U}_1' \mathfrak{U}_2' \mathfrak{U}_3' \ldots$ allein M_1 und N_1 in Betracht; die übrigen Hülfsgebilde dienen nur dazu, auch die anderen Glieder der durch $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ bestimmten Schaar ins Auge zu fassen.

Daher können wir $V_1 V_2 V_3 \ldots$ als eine reguläre Involution μten Ranges ansehen. Wir können ferner annehmen, dafs ihr Netz aufserhalb dessen von $U_1 U_2 U_3 \ldots$ liegt, und dafs sie mit $X_1 X_2 X_3 \ldots$ $m+\mu n$ verschiedene Punkte gemeinsam hat, unter denen sich keiner der untersuchten befindet. Die Hülfsschaar $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_3 \ldots$, $V_1 V_2 V_3 \ldots$ oder $[\mathfrak{U}], [V]$ ist also von einem Netze M_1 μter Stufe aus auf dasjenige von $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ zu projiciren. In der so entstehenden Schaar findet sich nur eine endliche Zahl entarteter Involutionen μten Ranges, und daher eine unendliche Zahl solcher regulärer, die mit $X_1 X_2 X_3 X_4 \ldots$ eine zweite reguläre Gruppe von $m+\mu n$ Punkten gemeinsam haben. Als Glied einer Involution mit zwei verschiedenen regulären Gruppen bleibt

das untersuchte Gebilde ungeändert, so lange wir den Zeiger von $[U]$ und damit M_1 ungeändert lassen.

Um nun andere Zeiger von $[U]$ aufzufinden, haben wir das Netz M_1' aufserhalb des Netzes, dem M_1 und die Involution angehören, anzunehmen, und von hier aus den älteren Zeiger $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_3 \ldots$ auf irgend ein Netz $(\mu + \alpha + 1)$ter Stufe, das ebenfalls das Trägernetz der Involution enthält, zu projiciren; der Zeiger gehe dabei in $\mathfrak{U}_1'' \mathfrak{U}_2'' \mathfrak{U}_3'' \ldots$, M_1 aber in ein Netz M_1'' μter Stufe über. Die Schaar

$$\mathfrak{U}_1'' \mathfrak{U}_2'' \ldots \mathfrak{U}_{\mu+3}'' \ldots, \quad V_1 V_2 V_3 \ldots V_{\mu+3} \ldots$$

aber haben wir von M_1'' aus auf das Netz zu projiciren, dem $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ gleichzeitig angehören. Nun entsteht aber die ganze neue Hülfsschaar aus der alten durch Projection von M_1' aus, so $\mathfrak{W}_1'' \mathfrak{W}_2'' \ldots \mathfrak{W}_{\mu+3}''$ aus $\mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2 \ldots \mathfrak{W}_{\mu+3}$. Demnach bestimmen die Büschel

$$M_1(\mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2 \ldots \mathfrak{W}_{\mu+3}) \quad \text{und} \quad M_1''(\mathfrak{W}_1'' \mathfrak{W}_2'' \ldots \mathfrak{W}_{\mu+3}'')$$

dieselbe Involution μten Ranges $W_1 W_2 W_3 \ldots W_{\mu+3}$ in dem Netze, dem $[U]$ und $[V]$ gleichzeitig angehören. Da nämlich das Netz $(2\mu + 2)$ter Stufe, welches durch M_1, M_1'' und $\mathfrak{W}_\lambda$ oder $\mathfrak{W}_\lambda''$ bestimmt wird, das Netz (UV) in nur einer Gruppe trifft, so müssen in derselben auch die Netze $(M\mathfrak{W}_\lambda)$ und $(M''\mathfrak{W}_\lambda'')$ ihm begegnen.

Die Schaar ist also durch $U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu+3}$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots V_{\mu+3}$ eindeutig bestimmt, und damit auch eine Gruppe, die $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_3 \ldots$ mit $X_1 X_2 X_3 \ldots$ gemeinsam ist.

§ 111. Zwei projectivische Involutionen μten Ranges oder $(\mu - \alpha)$-ten und $(\mu - \beta)$ten Ranges, resp. deren Ausartungen bestimmen nur eine Schaar nach Art der §§ 108 oder 109.

Es seien

$$U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu+3} \ldots; \; V_1 V_2 V_3 \ldots V_{\mu+3} \ldots; \; W_1 W_2 W_3 \ldots W_{\mu+3} \ldots$$

drei Involutionen der ersteren Schaar. Es kommt darauf an, zu zeigen, dafs die dritte Involution durch die beiden ersteren und ein Element B_1 der Gruppe W_1 eindeutig bestimmt ist, wenn U_1 und V_1 nicht zusammenfallen, und B_1 nicht beiden gemeinsam ist. Wir beziehen zu diesem Zwecke unendlich viele einförmige Gebilde des Trägers auf die Involution so projectivisch, dafs das U_2, V_2 und W_2 entsprechende Element B_2

in keiner dieser drei Gruppen sich findet. Unter solchen Umständen hat das einförmige Gebilde drei Gruppen von $m+\mu$ Punkten mit den drei Involutionen μten Ranges gemeinsam, und drei so zusammengehörige Gruppen U, V, W gehören derselben Involution an. B_i kann noch in der U_i und V_i zugehörigen Gruppe W_i gewählt werden. Wird die zur Herstellung von $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ etwa nöthige Methode der Entartung geändert, so bleiben (§ 110) die Gruppen U und V, mithin auch W, da ihm B_1 angehört, ungeändert. Träte nun an die Stelle von $W_1 W_2 W_3 \ldots$ etwa $W_1 W_2' W_3' \ldots$, so fallen doch W_i und W_i' zusammen, da sie B_i gemeinsam haben und der Involution U_i, V_i angehören. Weil nun B_i ein beliebiges Element des Trägers der Involution war, so sind beide Involutionen $[W]$ und $[W']$ identisch. § 110

Sind nun $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ projectivische Involutionen von derselben Ordnung mit den Rangzahlen $\mu-\alpha$ und $\mu-\beta$, und ist $W_1 W_2 W_3 \ldots$ eine projectivische Involution μten Ranges aus einer Schaar, deren Involutionen mit ersterer die Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_\beta$, mit letzterer aber die Gruppen $V_{\beta+1}, V_{\beta+2}, \ldots V_{\beta+\alpha}$ gemeinsam haben, so besteht, wie im § 109 gezeigt ist, ein Glied der Schaar aus $U_1 U_2 U_3 \ldots$, und es werden die Glieder ganz unbestimmt, welche $V_{\beta+1}, V_{\beta+2}, \ldots V_{\beta+\alpha}$ zugehören. Ein anderes Glied der Schaar aber besteht aus $V_1 V_2 V_3 \ldots$, und in ihr werden die Glieder ganz unbestimmt, welche $U_1, U_2, \ldots U_\beta$ zugehören. Versteht man unter U, V, W die Coincidenzgruppen zwischen $B_1 B_2 B_3 \ldots$ und den drei genannten Reihen, also Gruppen zu $m+\mu-\alpha$, $m+\mu-\beta$ und $m+\mu$ Punkten, so gehört W der Involution $B_{\beta+1} B_{\beta+2} \ldots B_{\beta+\alpha} U$, $B_1 B_2 B_3 \ldots B_\beta V$ an. Daraus folgt, wie vorher, dafs $W_1 W_2 W_3 \ldots W_{\mu+3}$ durch $U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu-\alpha+3} \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots V_{\mu-\beta+3}$ eindeutig bestimmt ist.

§ 112. Sind $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ zwei projectivische Involutionen desselben Trägers der Ordnungen m und n und der Rangzahlen μ und ν, so giebt es eine Involution $U_1 V_1, U_2 V_2, U_3 V_3, U_4 V_4, \ldots$ der Ordnung $m+n$ und des Ranges $\mu+\nu$, deren Glieder aus je zwei entsprechenden der vorigen Reihen sich zusammensetzen.

Der Satz ist bewiesen, wenn μ und ν beide gleich 1 sind (§ 94). Sobald daher von $\mu, \nu-1$ auf μ, ν geschlossen werden kann ($\nu \geqq \mu$), gilt

derselbe allgemein. Zu diesem Zwecke legen wir eine beliebige zu den gegebenen projectivische Involution $n$ter Ordnung und $(\nu-1)$ten Ranges $V_1 V'_2 V'_3 V'_4 \ldots$, die mit der zweiten gegebenen Involution V_1 entsprechend gemein hat. Wir können sie mit $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ oder $[V]$ zu einer Schaar rechnen, deren Glieder mit letzterer aufser V_1 das Glied V_2 gemeinsam haben. In dieser Schaar giebt es noch eine zweite Involution $(\nu-1)$ten Ranges $V''_1 V_2 V''_3 V''_4 \ldots$, welche mit $[V]$ wohl V_2, aber nicht V_1 gemeinsam hat. Nach der gemachten Annahme sind

1) $U_1 V_1, U_2 V'_2, U_3 V'_3, U_4 V'_4, \ldots$ und $U_1 V''_1, U_2 V_2, U_3 V''_3, U_4 V''_4, \ldots$

zwei zu einander projectivische Involutionen $(m+n)$ Ordnung, $(\mu+\nu-1)$-ten Ranges. Nach § 109 kann man eine und nach § 111 nur eine Schaar von Involutionen $(m+n)$ter Ordnung und $(\mu+\nu)$ten Ranges bilden, die sämmtlich unter einander projectivisch sind, und die alle mit ersterer die Gruppe $U_1 V_1$, mit letzterer die Gruppe $U_2 V_2$ entsprechend gemein haben. Sind M', M'', M die Coincidenzgruppen der Reihen 1) und eines beliebigen durch $U_3 V_3$ bestimmten Gliedes der Schaar mit irgend einem zu ihnen projectivischen einförmigen Gebilde $B_1 B_2 B_3 B_4 \ldots$ so gehören (§ 111) $B_2 M'$, $B_1 M''$ und M zu derselben Involution ersten Ranges und der Ordnung $m+n+\mu+\nu$. Nun liegen aber in M', M'' und folglich auch in M die $m+\mu$ Elemente, welche $U_1 U_2 U_3 \ldots$ mit $B_1 B_2 B_3 \ldots$ gemeinsam sind; sie enthalten aufserdem die Gruppen $B_2 N', B_1 N''$ und N einer Involution $(\nu+n)$ter Ordnung. N'', N' sind dabei die Coincidenzgruppen zwischen $V''_1 V_2 V''_3 V''_4 \ldots$ und $B_1 B_2 B_3 B_4 \ldots$, resp. zwischen $V_1 V'_2 V'_3 V'_4$ und $B_1 B_2 B_3 B_4 \ldots$ Wenn man daher B_3 in dem Gliede V_3 wählt, so ist N die Coincidenzgruppe zwischen $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ und $B_1 B_2 B_3$ (§ 111). Da hierin B_1 und B_2 noch ganz beliebig gewählt werden können, so folgt, dafs dem durch $U_3 V_3$ bestimmten Gliede, der Schaar 1), auch alle Glieder $U_1 V_1, U_2 V_2, U_3 V_3, \ldots U_{\mu+3} V_{\mu+3} \ldots$ angehören. Denn wenn man B_λ mit einem Elemente von V_λ zusammenfallen läfst, so kommt es in dem bezüglichen durch B_3 bestimmten Gliede der Involution $B_2 N', B_1 N''$ vor; daher ist $U_\lambda V_\lambda$ ein Glied der Involution, und zwar das U_λ entsprechende.

§ 113. Zwei projectivische Involutionen $m$ter Ordnung, μten Ranges und $n$ter Ordnung, νten Ranges haben nur dann unendlich viele Punkte mit einander gemeinsam, wenn sich beide von einer dritten projectivischen

Involution $r$ter Ordnung, ϱten Ranges nur um projectivische Involutionen unterscheiden.

Wir setzen den Satz voraus für die Werthe ν und $\mu-1$, wie er in der That für μ, $\nu=2$ richtig ist (§ 95). Statt der gegebenen Involutionen

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots \;\overline{\wedge}\; V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots \qquad 1)$$

betrachten wir die folgenden

$$U_1 V_1, U_1 V_2, U_1 V_3, U_1 V_4, \ldots \;\overline{\wedge}\; V_1 U_1, V_1 U_2, V_1 U_3, V_1 U_4, \ldots \qquad 2)$$

$(m+n)$ter Ordnung und der Rangzahlen μ, ν. Wenn diese beiden Schaaren nicht identisch sind, und daher $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ sich nicht nur um je eine unveränderliche Gruppe von einer dritten Involution unterscheiden, so giebt es in der Schaar 2) wenigstens eine Involution

$$W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots \quad \text{oder} \quad [W] \qquad 3)$$

$(m+n)$ter Ordnung $(\mu-1)$ten Ranges, von der zwar $U_1 V_1$ keine Gruppe ist, die aber alle Coincidenzstellen der Reihen 2) und also auch der Reihen 1) enthält. Mit $V_1 V_2 V_3 \ldots$ hat folglich $[W]$ unendlich viele Punkte gemeinsam. Beide umfassen mithin dieselbe zu beiden projectivische Involution $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$ $r$ter Ordnung und ϱten Ranges. Entweder $[Z]$ selbst, oder ein etwaiger Bestandtheil dieser Reihe mufs auch zugleich der Reihe $[U]$ angehören. Nehmen wir an, dafs $[Z]$ schon jene $[U]$ und $[V]$ gemeinschaftliche projectivische Involution ist, so dafs Ordnungs- und Rangzahlen derselben kleiner als die entsprechenden gegebenen Zahlen sind. Es sei zunächst $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ in der Form geschrieben

$$Z_1 X_1, Z_2 X_2, Z_3 X_3, Z_4 X_4, \ldots, \qquad 4)$$

so ist zu beweisen, dafs $X_1 X_2 X_3 X_4 \ldots$ eine zu den gegebenen projectivische Involution $(m-r)$ter Ordnung, $(\mu-\varrho)$ten Ranges ist. Zu diesem Zwecke sei $X_1 X'_2 X'_3 X'_4 \ldots$ eine zu $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$ projectivische Involution $(m-r)$ter Ordnung, $(\mu-\varrho)$ten Ranges, so dafs also (§ 112) $Z_1 X_1$, $Z_2 X'_2, Z_3 X'_3, Z_4 X'_4 \ldots$ eine projectivische Involution $m$ter Ordnung und μten Ranges ist. Alsdann constituiren

$$Z_1 X_1, Z_2 X_2, Z_3 X_3, Z_4 X_4 \ldots \;\overline{\wedge}\; Z_1 X_1, Z_2 X'_2, Z_3 X'_3, Z_4 X'_4, \ldots$$

eine Schaar, in der auch eine Involution $Z_1 X''_1, Z_2 X''_2, Z_3 X''_3, Z_4 X''_4 \ldots$ $m$ter Ordnung und $(\mu-1)$ten Ranges vorkommt. Wir können voraus-

setzen, dafs $X_1'' X_2'' X_3'' X_4'' \ldots$ eine zu $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$ projectivische Involution $(m-r)$ter Ordnung, $(\mu-\varrho-1)$ten Ranges ist. Von hier aus kann man aber ganz so, wie es im § 112 geschehen ist, schliefsen, dafs auch $X_1 X_2 X_3 X_4 \ldots$ eine zu $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$ projectivische Involution ist, und zwar von der $(m-r)$ten Ordnung und dem $(\mu-\varrho)$ten Range. Analog hat $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ die Form $Z_1 Y_1, Z_2 Y_2, Z_3 Y_3, Z_4 Y_4 \ldots$, und es ist $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 \ldots$ eine zu $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$ projectivische Involution $(n-r)$ter Ordnung und $(\nu-\varrho)$ten Ranges.

§ 114. Sollen unendlich viele Gruppen einer Involution $m$ter Ordnung und μten Ranges mehrfache Elemente umfassen, so mufs jedes Glied entweder dieselbe Gruppe mit mehrfachen Elementen oder die entsprechende Gruppe einer Involution niedrigerer Ordnung und niedrigeren Ranges mehrfach enthalten.

Es sei zuerst m gröfser als μ, die Involution aber gelagert in einem Netze νter Stufe. Ist nun D^m ein beliebiges $m$faches Element des Trägers (α), so suche man für jede Gruppe U_λ die Doppelpunktsgruppe der Involution D^m, U_λ auf. Dieselben bilden eine projectivische Involution $(m-1)$ter Ordnung, wenn U_λ eine solche im gegebenen Netze durchläuft (§ 76). Dem ganzen Netze entspricht ein collineares ihrer Doppelpunktsgruppen, falls nicht etwa D^m in dem ersteren sich vorfindet. Alsdann erhält man nur eine Doppelpunktsgruppe für jede von D^m ausgehende Involution, im Ganzen also nur ein Netz $(\nu-1)$ter Stufe und $(m-1)$ter Ordnung. Einem weiteren in dem ersten Netze enthaltenen $m$fachen Elemente entspricht ein $(m-1)$faches in dem Netze der Doppelpunktsgruppen. Wird vorausgesetzt, dafs sich in einem Netz $(m-1)$-ter Ordnung und $(\nu-1)$ter Stufe höchstens $\nu-1$ $(m-1)$fache Elemente befinden, wenn $m-1$ gröfser als $\nu-1$ ist, so folgt von selbst, dafs in einem νfachen Netze $m$ter Ordnung höchstens ν $m$fache Elemente liegen, wenn m gröfser als ν ist. Das letztere Resultat ist also durch einen Schlufs von $\nu-1$ auf ν erwiesen. Daher kann in diesem Falle D^m aufserhalb des Netzes angenommen werden, und es entspricht dem νfachen Netze ein νfaches der Doppelpunktsgruppen. Auf das ganze Netz μter Stufe, in welchem der Zeiger der gegebenen Involution sich befindet, beziehen wir collinear ein zweites so, dafs dem eigentlichen Träger der

Involution das Netz der Doppelpunktsgruppen entspricht. Dem Zeiger entspricht dann ein projectivischer in dem neuen Netze, und der alten entarteten Involution eine solche $[U']$ mit dem neuen Zeiger, die in dem Netze der Doppelpunktsgruppen liegt. Sie ist zwar noch vom Range μ, aber nur noch von der Ordnung $m-1$. Wenn keine unveränderlichen Elemente den Gruppen der gegebenen Involution gemeinsam sind, müssen beide von einander wesentlich verschieden sein. Zwei entsprechende Gruppen der Involutionen haben nur dann gemeinsame Elemente, wenn in derjenigen der gegebenen Involution mehrfache Elemente sich vorfinden, und zwar ist ein $p$faches Element einer Gruppe U_λ ein $(p-1)$faches ihrer entsprechenden. Unendlich viele Gruppen mit mehrfachen Elementen können daher nur vorkommen, wenn beide Gebilde in Involutionen niedrigeren Ranges zerfallen. Für die einzelnen Bestandtheile ist aber der Satz, welchen wir beweisen wollen, vorauszusetzen. Es enthält mithin jede einzelne Theilinvolution $[V],[W],[Z],\dots$ nur eine endliche Anzahl singulärer Gruppen. In der untersuchten Involution müssen also einzelne Theilinvolutionen mehrfach auftreten; ihre Gruppe U_λ ist von der Form $V_\lambda^m W_\lambda^n \dots Z_\lambda^\varrho$, wo $V_\lambda, W_\lambda, \dots Z_\lambda$ homologe Gruppen projectivischer Involutionen $[V],[W],\dots[Z]$ sind. Die entsprechende Gruppe der Involution $[U']$ ist von der Form $X V_\lambda^{m-1} W_\lambda^{n-1} \dots Z_\lambda^{\varrho-1}$.

Falls nun m nicht grö∫ser als μ, jedoch grö∫ser als ν ist, hat man in dem noch νfachen Netze der Doppelpunktsgruppen zuerst alle Gruppen um $s+1$ unveränderliche Elemente zu vermehren, wenn die gegebene Involution bei der Ausartung mit s unveränderlichen Punkten $(s+m=\mu)$ erschien. (Vergl. § 106). Man bezieht nun, wie vorher, zwei Netze μter Stufe und μter Ordnung so collinear, da∫s die beiden genannten νfachen Netze einander entsprechen. Dann entsprechen zwei entartete Involutionen μter Ordnung und μten Ranges mit projectivischen Zeigern einander. Während aber von der letzteren Involution sich $s+1$ unveränderliche Elemente ablösen lassen, lösen von der gegebenen sich s Punkte ab. Da beide Involutionen somit nicht wesentlich identisch sein können, so kann man, wie oben, weiter schlie∫sen. Wenn endlich m gleich ν ist (bei allgemeinen Involutionen gleich μ), so liegt D^m in dem νfachen Netz und man erhält nur ein $(\nu-1)$faches Netz der Doppelpunktsgruppen, das man collinear auf ein beliebiges au∫serhalb D^m oder D^ν gelegenes $(\nu-1)$-

faches Theilnetz des gegebenen beziehen kann. Alle seine Gruppen versehe man noch mit einem unveränderlichen Elemente, und beziehe das von ihm und D' constituirte νfache Netz collinear auf das gegebene. Alle Gruppen beider νfachen Netze N und N' versehe man mit je derselben unveränderlichen Gruppe von $\mu-\nu$ Elementen, und betrachte die so entstandenen Netze als homologe Gebilde collinearer Netze μter Stufe. In dem ersteren kann man einen Zeiger der gegebenen Involution finden, ihm entspricht in dem zweiten ein projectivischer; aus der zur gegebenen homologen Entartung entsteht eine in N' gelegene Involution μten Ranges, welche aus dem gefundenen Zeiger durch Projection von einem $(\mu-\nu-1)$fachen, ihn nicht treffenden Netze aus entsteht. Diese entartete Involution aber haben wir von der Gruppe aus, die aus D' und $\mu-\nu$ unveränderlichen Elementen besteht, auf das Netz zu projiciren, welches die Doppelpunktsgruppen, um $\mu-\nu+1$ unveränderliche Punkte vermehrt, enthält. In diesem Netze entsteht eine Involution μten Ranges, die aus dem ursprünglichen Zeiger offenbar durch Projection von einem $(\mu-\nu)$fachen Netze aus entsteht. Während man nun die letztere Involution durch Ablösung einer constanten Gruppe auf die $(\nu-1)$te Ordnung reduciren kann, geht die erste nur auf die νte Ordnung zurück. Beide sind daher wesentlich von einander verschieden und können nur dann unendlich viele Gruppen gemeinsam haben, wenn beide in Theilinvolutionen zerfallen. Nach der Natur der Sache müssen nun wieder einzelne dieser Involutionen in der gegebenen mehrfach auftreten.

§ 115. Die Elemente des Trägers einer Involution μten Ranges, welche nicht μ verschiedenen Gruppen derselben angehören, können nur dann in unendlicher Anzahl auftreten, wenn die Involution in Bestandtheile zerfällt, und unter diesen sich wenigstens zwei gleiche befinden.

Wir beziehen zwei auf der gegebenen Involution gelegene Gruppenreihen

1) $$U_1 U_2 U_3 \ldots AB \quad \text{und} \quad V_1 V_2 V_3 \ldots AB$$

projectivisch auf einander, wenn die gegebene Involution allgemein ist; wenn sie entartet ist, weisen wir sie zwei projectivischen Anordnungen ihres Zeigers zu. Wenn U_1 an V_1 heranrückt, so rückt auch U_λ an V_λ heran. Die Coincidenzelemente beider Reihen gehören gleichzeitig zwei

benachbarten Gruppen an. An der Grenze erhält man daraus ein Element, welches einer ganzen Tangenteninvolution angehört, und mithin in weniger als μ verschiedenen Gruppen vorkommt. Zugleich bekommt man so alle verschiedenen Elemente der untersuchten Art. Denn nach § 102 mufs das Netz $(\mu-1)$ter Stufe, welches durch das Element bestimmt wird (§ 83) wenigstens von einer der Gruppen, die ihr mit der Involution gemeinsam sind, die Tangenteninvolution enthalten. Soll es unendlich viele solche Elemente geben, so müssen an der Grenze die Reihen 1) unendlich viele Elemente gemeinsam haben. In ihrer Schaar kommt aber wenigstens eine Involution $(\mu-1)$ten Ranges und $m$ter Ordnung vor, die einer bestimmten Grenze sich nähert. Diese Involution hat mit der gegebenen nur dann unendlich viele Punkte gemeinsam, wenn beide in Bestandtheile zerfallen, und einzelne von diesen Reihen ihnen beiden gemeinsam sind. Die gegebene Involution ist daher von der Form

$$[U] = [U'][U''][U'''] \dots$$

Wären nun diese Bestandtheile alle von einander verschieden und nicht weiter zerlegbar, so gäbe es erstens nur einzelne Elemente E, die zwei Bestandtheilen gleichzeitig angehören, und zweitens, wenn wir unseren Satz für Gebilde niedrigeren Ranges voraussetzen, wie er für Involutionen zweiten Ranges gilt, nur eine endliche Anzahl von Elementen F, die in irgend einem Bestandtheil weniger Gruppen angehören, als dessen Rang anzeigt. Jeder von den E und F verschiedene Punkt bestimmte aber dann offenbar so viele verschiedene Gruppen, als der Rang von $[U]$ anzeigt. Sollen daher unendlich viele Elemente weniger als μ verschiedene Gruppen bestimmen, so müssen wenigstens zwei dieser Bestandtheile zusammenfallen; dann aber gehört wirklich jedes Element zu weniger als μ verschiedenen Gruppen.

§ 116. Zwei Involutionen der Ordnungen m und n, der Ränge μ und ν resp. ($\nu \leqq \mu$) haben, projectivisch bezogen, im Allgemeinen und höchstens $m\nu + n\mu$ gemeinsame Stellen, wenn sie nicht eine zu beiden projectivische Involution $r$ter Ordnung und ϱten Ranges gemeinsam haben. Statt ihrer können auch Ausartungen eintreten.

Wir setzen voraus, dafs der Satz für die Zahlen ν und $\mu-1$ ($\mu \geqq \nu$) gilt, und dafs die gegebenen Involutionen nicht in Theile zerfallen ($U_1 U_2$

$U_3 U_4 \ldots \barwedge V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$). Von den beiden entsprechenden Gruppen U_1 und V_1 kann vorausgesetzt werden, dafs sie kein Element mit einander gemeinsam haben, aus je m resp. n verschiedenen Elementen bestehen, von denen überdies jedes zu μ resp. ν verschiedenen Gruppen (§§ 114 und 115) gehört. Es sei nun $U_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$ eine zu den gegebenen projectivische Involution $m$ter Ordnung $(\mu-\nu)$ten Ranges, so betrachten wir die projectivischen Involutionen $(m+n)$ter Ordnung μten Ranges (§ 112)

1) $V_1 U_1, V_2 W_2, V_3 W_3, V_4 W_4, \ldots \barwedge V_1 U_1, V_1 U_2, V_1 U_3, V_1 U_4, \ldots$

In der durch beide bestimmten Schaar giebt es eine Involution $(m+n)$-ter Ordnung, $(\mu-1)$ten Ranges $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$, welche alle aufserhalb $U_1 V_1$ gelegenen Coincidenzstellen der Reihen 1) mit beiden gemeinsam hat. Mit $V_1 V_2 V_3 \ldots$ hat sie daher aufser ihren Coincidenzstellen mit $U_1 U_2 U_3 \ldots$ alle die Stellen gemeinsam, die ihr Element in V_1 haben, ohne dieser Gruppe anzugehören. Jedes Element von V_1 gehört aber noch zu $(\nu-1)$ anderen Stellen. Wenn wir daher den Satz für die Zahlen $\mu-1$ und ν voraussetzen, wie er für $\mu=\nu=2$ gilt, so haben die beiden gegebenen Involutionen

$$(m+n)\nu+n(\mu-1)-n(\nu-1) = m\nu+n\mu$$

gemeinsame Stellen. Da somit von $\mu-1, \nu$ auf μ, ν geschlossen werden kann, so ist der Satz allgemein bewiesen. Die Formel rechtfertigt sich auch für zerfallende Involutionen.

In dem entsprechenden Beweise für $\mu=2, \nu=2$ haben wir in Rücksicht auf spätere Anwendungen ein complicirteres Verfahren angewendet.

§ 117. Es seien zwei projectivische Schaaren

$$[U][V][W][Z] \ldots \barwedge [U'][V'][W'][Z'] \ldots$$

projectivischer Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges gegeben. Man kann unendlich viele zu jenen projectivische Schaaren

$$[U''][V''][W''][Z''] \ldots \barwedge [U'''][V'''][W'''][Z'''] \ldots \barwedge \ldots \barwedge [U^{(\lambda)}][V^{(\lambda)}][W^{(\lambda)}][Z^{(\lambda)}] \ldots$$

aus Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges, die zu jenen projectivisch sind, so bilden, dafs je die entsprechenden Involutionen zu Schaaren

$$[U][U'][U''] \ldots [U^{(\lambda)}] \barwedge [V][V'][V''] \ldots [V^{(\lambda)}] \barwedge [W][W'][W''] \ldots [W^{(\lambda)}] \barwedge \ldots$$

gehören, die zu einander projectivisch sind. Ist den ersteren Schaaren eine Involution $[U]$ entsprechend gemeinsam, so ist auch den letzteren Schaaren eine Involution $[X]$ entsprechend gemeinsam.

Der Beweis ist bereits in dem enthalten, was im § 110 entwickelt wurde. Wir können durch Annahme geeigneter Hülfsnetze μter Stufe die gegebenen in allgemeine Involutionen μten Ranges projiciren

$$\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_3\mathfrak{U}_4 \ldots ;\ \mathfrak{V}_1\mathfrak{V}_2\mathfrak{V}_3\mathfrak{V}_4 \ldots ;\ \mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3\mathfrak{W}_4 \ldots ;\ \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2\mathfrak{Z}_3\mathfrak{Z}_4 \ldots \quad 1)$$
$$\mathfrak{U}_1'\mathfrak{U}_2'\mathfrak{U}_3'\mathfrak{U}_4' \ldots ;\ \mathfrak{V}_1'\mathfrak{V}_2'\mathfrak{V}_3'\mathfrak{V}_4' \ldots ;\ \mathfrak{W}_1'\mathfrak{W}_2'\mathfrak{W}_3'\mathfrak{W}_4' \ldots ;\ \mathfrak{Z}_1'\mathfrak{Z}_2'\mathfrak{Z}_3'\mathfrak{Z}_1' \ldots , \quad 2)$$

deren Netze sämmtlich von einander unabhängig sind. Die unter 1) geschriebenen Netze gehören alle zu einer, die unter 2) geschriebenen zu einer zweiten projectivischen Schaar von Involutionen μten Ranges. Wir können nun die beiden $(2\mu+1)$fachen Netze, in denen 1) und 2) liegen, collinear so beziehen (§ 110), dafs $[\mathfrak{U}]$ und $[\mathfrak{U}']$, $[\mathfrak{V}]$ und $[\mathfrak{V}']$, $[\mathfrak{W}]$ und $[\mathfrak{W}']$, u. s. w. einander entsprechen. Beide constituiren aber eine Schaar collinearer Netze. Jenen beiden projectivischen Schaaren 1), 2) entsprechen in den anderen Netzen derselben die projectivischen

$$\mathfrak{U}_1''\mathfrak{U}_2''\mathfrak{U}_3''\mathfrak{U}_4'' \ldots ,\ \mathfrak{V}_1''\mathfrak{V}_2''\mathfrak{V}_3''\mathfrak{V}_4'' \ldots ,\ \mathfrak{W}_1''\mathfrak{W}_2''\mathfrak{W}_3''\mathfrak{W}_4'' \ldots \quad 3)$$
$$\mathfrak{U}_1^{(\lambda)}\mathfrak{U}_2^{(\lambda)}\mathfrak{U}_3^{(\lambda)}\mathfrak{U}_4^{(\lambda)} \ldots ,\ \mathfrak{V}_1^{(\lambda)}\mathfrak{V}_2^{(\lambda)}\mathfrak{V}_3^{(\lambda)}\mathfrak{V}_4^{(\lambda)} \ldots \ \mathfrak{W}_1^{(\lambda)}\mathfrak{W}_2^{(\lambda)}\mathfrak{W}_3^{(\lambda)}\mathfrak{W}_4^{(\lambda)} \ldots \quad 4)$$

Alle diese homologen Schaaren sind zu einander projectivisch, denn es gilt dies von den homologen Leitinvolutionen

$$\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1\mathfrak{W}_1\mathfrak{Z}_1 \ldots \barwedge \mathfrak{U}_1'\mathfrak{W}_1'\mathfrak{W}_1'\mathfrak{Z}_1' \ldots \barwedge \mathfrak{U}_1''\mathfrak{V}_1''\mathfrak{W}_1''\mathfrak{Z}_1'' \ldots \barwedge \mathfrak{U}_1^{(\lambda)}\mathfrak{V}_1^{(\lambda)}\mathfrak{W}_1^{(\lambda)}\mathfrak{Z}_1^{(\lambda)} \ldots$$

Homologe Involutionen in allen Feldern schliefsen sich zu Schaaren

$$5)\ [\mathfrak{U}][\mathfrak{U}'][\mathfrak{U}''] \ldots [\mathfrak{U}^{(\lambda)}] \ldots ;\ 6)\ [\mathfrak{V}][\mathfrak{V}'][\mathfrak{V}''] \ldots [\mathfrak{V}^{(\lambda)} ;$$
$$7)\ [\mathfrak{W}][\mathfrak{W}'][\mathfrak{W}''] \ldots [\mathfrak{W}^{(\lambda)}] \ldots ;\ 8)\ [\mathfrak{Z}][\mathfrak{Z}'][\mathfrak{Z}''] \ldots [\mathfrak{Z}^{(\lambda)}] \ldots$$

zusammen, die projectivisch sind, weil ihre Leitinvolutionen

$$\mathfrak{U}_\mu\mathfrak{U}_\mu'\mathfrak{U}_\mu'' \ldots \mathfrak{U}_\mu^{(\lambda)} \ldots ,\ \mathfrak{V}_\mu\mathfrak{V}_\mu'\mathfrak{V}_\mu'' \ldots \mathfrak{V}_\mu^{(\lambda)} \ldots ,$$
$$\mathfrak{W}_\mu\mathfrak{W}_\mu'\mathfrak{W}_\mu'' \ldots \mathfrak{W}_\mu^{(\lambda)} \ldots ,\ \mathfrak{Z}_\mu\mathfrak{Z}_\mu' \ldots \mathfrak{Z}_\mu^{(\lambda)} \ldots$$

zugleich Leitinvolutionen der Schaar von Netzen $(2\mu+1)$ter Stufe sind. Aus diesen Gebilden gehen durch Projection diejenigen des Satzes hervor. Um den Zusatz zu beweisen, lassen wir zuerst $[\mathfrak{U}], [\mathfrak{U}'], [\mathfrak{U}''], \ldots [\mathfrak{U}^{(\lambda)}], \ldots$ zusammenfallen in $[\mathfrak{U}]$. Dies geschieht aber, wenn wir von dem Netze $(\mathfrak{U}^{(\varrho)})$ irgend einer der genannten Involutionen aus die ganze Doppelschaar auf das durch $(\mathfrak{U}), (\mathfrak{V}), (\mathfrak{V}')$ bestimmte Netz $(3\mu+2)$ter Stufe projiciren. Dann

entstehen aus den Schaaren 1), 2), 3), 4), ... unter sich projectivische Schaaren, die sämmtlich die Involution [𝔘] entsprechend gemeinsam haben, aus den Schaaren 5), 6), 7), 8), ... entstehen projectivische, welche homologe Involutionen der vorigen Schaaren verbinden. Auch sie haben alle eine Involution entsprechend gemeinsam; da nämlich ein Netz $(2\mu+1)$ter Stufe alle Involutionen $[U^{(\varrho)}], [\mathfrak{B}^{(\varrho)}], [\mathfrak{W}^{(\varrho)}], [\mathfrak{Z}^{\varrho}]$ umfaſst, so werden alle diese in eine Involution $[X]$ projicirt, die daher jeder Schaar homologer Involutionen angehört. Durch geeignete Projection kann man die soeben betrachtete Schaar in die behandelte überführen.

§ 118. Bilden $U_1' U_2' U_3' U_4' \ldots ; U_1'' U_2'' U_3'' U_4'' \ldots ; U_1''' U_2''' U_3''' U_4''' \ldots ; \ldots$ eine Schaar projectivischer Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges, ist $V_1' V_2' V_3' V_4' \ldots ; V_1'' V_2'' V_3'' V_4'' \ldots ; V_1''' V_2''' V_3''' V_4''' \ldots ; \ldots$ eine zu jener projectivische Schaar von Involutionen $n$ter Ordnung und νten Ranges, die zu jenen projectivisch sind, ist ferner allgemein W_λ die Coincidenzgruppe zweier entsprechender Leitinvolutionen $U_\lambda' U_\lambda'' U_\lambda''' \ldots U_\lambda^{(\nu)} \ldots$ $\overline{\wedge}\ V_\lambda' V_\lambda'' V_\lambda''' \ldots V_\lambda^{(\nu)} \ldots$, so ist $W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$ eine zu allen jenen projectivische Involution $(m+n)$ter Ordnung und $(\mu+\nu)$ten Ranges.

Der Satz folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden. Denn nach § 117 giebt es eine Involution $W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$ $(m+n)$ter Ordnung, $(\mu+\nu)$ten Ranges, welche mit je zwei homologen Gliedern der projectivischen Schaaren

1) $U_1' V_1', U_2' V_2', U_3' V_3', U_4' V_4', \ldots ; U_1' V_1'', U_2' V_2'', U_3' V_3'', U_4' U_4'', \ldots ; \ldots ;$
$U_1' V_1^{(\nu)}, U_2 V_2^{(\nu)}, U_3 V_3^{(\nu)}, U_4 V_4^{(\nu)}, \ldots$

2) $V_1' U_1', V_2' U_2', V_3' U_3', V_4' U_4', \ldots ; V_1' U_1'', V_2' U_2'', V_3' U_3'', V_4' U_4'', \ldots ; \ldots ;$
$V_1' U_1^{(\nu)}, V_2' U_2^{(\nu)}, V_3' U_3^{(\nu)}, V_4' U_4^{(\nu)}, \ldots$

zu je einer Schaar gehört. Da dann W_λ den Involutionen

$$U_\lambda' V_\lambda'', V_\lambda' U_\lambda''; U_\lambda' V_\lambda''', V_\lambda' U_\lambda'''; \ldots U_\lambda' V_\lambda^{(\nu)}, V_\lambda' U_\lambda^{(\nu)}$$

gleichzeitig angehört, so ist W_λ (§ 33, 3) die Coincidenzgruppe der projectivischen Reihen

$$U_\lambda' U_\lambda'' U_\lambda''' \ldots U_\lambda^{(\nu)} \ldots \ \overline{\wedge}\ V_\lambda' V_\lambda'' V_\lambda''' \ldots V_\lambda^{(\nu)} \ldots$$

§ 119. Ist $W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$ eine beliebige Involution $(\mu+1)$ten Ranges und $(m+1)$ter Ordnung, gebildet aus Punkten einer Geraden, haben die projectivischen Punktreihen $([A'], [A''], [A'''], \ldots [A^{(\lambda)}])$

$$MNA_3'A_4'A_5' \ldots ; MNA_3''A_4''A_5'' \ldots ; MNA_3'''A_4'''A_5''' \ldots ; \ldots$$
$$MNA_3^{(\lambda)}A_4^{(\lambda)}A_5^{(\lambda)} \ldots$$

mit ihr die Punkte M, N entsprechend gemeinsam, hat eine Involution $V_1'V_2'V_3'V_4'V_5' \ldots$ $m$ter Ordnung und μten Ranges, die zu den Reihen projectivisch ist, mit $[W]$ neben anderen die $m+\mu$ übrigen Coincidenzstellen zwischen $MNA_3'A_4'A_5' \ldots$ und $W_1W_2W_3W_4W_5 \ldots$ gemeinsam, so gehört $[V']$ zu einer Schaar $[V'][V''][V'''] \ldots$ unter einander projectivischer Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges, welche zusammen mit der projectivischen Schaar $[A'][A''][A'''] \ldots$ der zu den einzelnen $[V]$ projectivischen Punktreihen $[A]$ die Involution $[W]$ erzeugt. Jede Gruppe W_ϱ ist dann also die Coincidenzgruppe zwischen einer Leitreihe $A_\varrho' A_\varrho'' A_\varrho''' \ldots$ und der zugehörigen Leitinvolution $V_\varrho' V_\varrho'' V_\varrho''' \ldots$

In der Schaar, welche die beiden projectivischen Involutionen

$$MV_1', NV_2', A_3^{(\lambda)}V_3', A_4^{(\lambda)}V_4' \ldots, \quad W_1W_2W_3W_4 \ldots$$

bestimmen, befindet sich eine Involution, die mit $MNA_1'A_2'A_3' \ldots$ einen beliebigen Punkt A_ϱ aufserhalb ihrer $n+\mu+2$ Coincidenzpunkte mit $[W]$ entsprechend gemeinsam hat, und daher (§ 116) $MNA_3'A_4'A_5' \ldots$ als einen Theil enthält. Sie ist also von der Form

$$MV_1^{(\lambda)}, NV_2^{(\lambda)}, A_3'V_3^{(\lambda)}, A_4'V_4^{(\lambda)}, A_5'V_5^{(\lambda)} \ldots$$

Auf die beiden projectivischen Schaaren

$$MV_1^{(\lambda)}, NV_2^{(\lambda)}, A_3'V_3^{(\lambda)}, A_4'V_4^{(\lambda)}, \ldots ; \; W_1, W_2, W_3, W_4, \ldots ;$$
$$MV_1', NV_2', A_3^{(\lambda)}V_3', A_4^{(\lambda)}V_4', \ldots$$
$$MV_1^{(\mu)}, NV_2^{(\mu)}, A_3'V_3^{(\mu)}, A_4'V_4^{(\mu)}, \ldots ; \; W_1, W_2, W_3, W_4, \ldots ;$$
$$MV_1', NV_2', A_3^{(\mu)}V_3', A_4^{(\mu)}V_4', \ldots$$

findet der Zusatz zum § 117 Anwendung. Sie bestimmen daher unendlich viele zu ihnen projectivische Schaaren von Involutionen μten Ranges, die alle mit jenen die Involution $W_1W_2W_3 \ldots$ entsprechend gemeinsam haben. Homologe Involutionen liegen in projectivischen Schaaren angeordnet, die alle eine Involntion entsprechend gemeinsam haben. Die beiden Schaaren

$$MV_1^{(\lambda)}, NV_2^{(\lambda)}, A_3'V_3^{(\lambda)}, A_4'V_4^{(\lambda)}, \ldots ; \; MV_1^{(\mu)}, NV_2^{(\mu)}, A_3'V_3^{(\mu)}, A_4'V_4^{(\mu)}, \ldots$$

und

$$MV_1', NV_2', A_3^{(\lambda)}V_3', A_4^{(\lambda)}V_4', \ldots ; \; MV_1', NV_2', A_3^{(\mu)}V_3', A_4^{(\mu)}V_4', \ldots$$

oder $[A' V^{(\lambda)}]$, $[A' V^{(\mu)}]$ und $[A^{(\lambda)} V']$, $[A^{(\mu)} V']$ haben aber nur die eine Involution $[A' V']$ oder $M V_1'$, $N V_2'$, $A_3' V_3'$, $A_4' V_4'$, ... gemeinsam. Setzt man $[A'][A''][A'''] \ldots [A^{(\lambda)}][A^{(\mu)}][A^{(\nu)}] \ldots \barwedge [V'][V''][V'''] \ldots [V^{(\lambda)}][V^{(\mu)}][V^{(\nu)}] \ldots$, so gehört $[W]$ jeder der Schaaren $[A' V^{(\nu)}]$, $[A^{(\nu)} V']$ an und ist, wie der Satz behauptet, das Erzeugniſs der letzteren projectivischen Schaaren; jede Gruppe ist die Coincidenzgruppe von zwei entsprechenden Leitinvolutionen.

Viertes Capitel. §§ 120—178.

Allgemeine Theorie der algebraischen ebenen Curven.

Erster Abschnitt.

Die Kegelschnitte. §§ 120—128.

In diesem Capitel sollen Lehrsätze über die Punktgebilde einer beliebigen reellen Ebene aufgestellt werden, die in der analytischen Geometrie als algebraische Curven bezeichnet werden. Nachdem in dem Vorangegangenen die Hülfsmittel zu diesem Unternehmen ausführlich entwickelt sind, werden wir in diesem Capitel ohne Schwierigkeit zu dem genannten Ziele gelangen.

§ 120. Zwei projectivische Strahlbüschel $A_1(B_1 B_2 C_1 \ldots)$ und A_2 $(B_1 B_2 C_1 \ldots)$, deren Centren beliebige reelle oder imaginäre Punkte der Ebene sind, erzeugen einen zu beiden perspectivischen Kegelschnitt, auf dem A_1, A_2 und die Punkte liegen, in denen zwei entsprechende Strahlen sich schneiden. Derselbe kann zu allen Strahlbüscheln perspectivisch gesetzt werden, die Punkte von ihm zu Centren haben.

Durch irgend fünf Punkte, von denen keine vier derselben Geraden angehören, läfst sich allemal ein und nur ein Kegelschnitt legen.

Wenn irgend drei der fünf Punkte, etwa A_1, A_2, C_1 einer Geraden a angehören, die beiden anderen aber aufserhalb derselben liegen, und daher eine andere Gerade b bestimmen, so löst sich der Kegelschnitt in a und b auf. Sollen zwei Büschel mit Centren aufserhalb a so bezogen werden, dafs in A_1, A_2, C_1, B_1, B_2 entsprechendeStrahlen sich treffen, so müssen sie zu a perspectivisch liegen. Zwei entsprechende Strahlen müssen sich entweder nur auf a schneiden oder zusammenfallen. Da nun in B_1 und B_2

entsprechende Strahlen sich treffen, so müssen beide Centren P und Q auf B_1B_2 liegen. Liegt P auf dem Strahle a, Q aufserhalb desselben, so entsprechen dem Strahle a des ersteren drei verschiedene und daher (§ 16, 1) alle Strahlen des zweiten Büschels; alle von a verschiedenen Strahlen des Büschels P entsprechen einem Strahle des Büschels Q. Da aber nach B_1 und B_2 entsprechende Strahlenpaare führen, so gehört Q der Geraden B_1B_2 an. Sollen endlich P und Q dem Strahle a angehören, so entspricht a, weil auf ihm drei Punkte liegen, sich selbst. Von den perspectivischen Büscheln müssen sich je zwei entsprechende Strahlen auf B_1B_2 treffen. Sollen sich also von zwei projectivischen Büscheln je zwei entsprechende Strahlen in den drei Punkten A_1, A_2, C_1 von a und in B_1, B_2 treffen, so ist allemal das Geradenpaar ab ihr Erzeugnifs.

Liegen keine drei der fünf Punkte A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 auf einer Geraden, so ist das Erzeugnifs $(A_1A_2)(B_1B_2C_1\ldots)$ der beiden Büschel $A_1(B_1 B_2C_1\ldots)$ und $A_2(B_1B_2C_1\ldots)$ identisch mit dem Erzeugnifs $(B_1B_2)(A_1 A_2C_1\ldots)$ der beiden Büschel $B_1(A_1A_2C_1\ldots) \barwedge B_2(A_1A_2C_1\ldots)$. Die beiden Büschel A_1 und A_2 schneiden auf C_1B_1 und C_1B_2, da A_1C_1 und A_2C_1 sich entsprechen, perspectivische Punktreihen aus. Verbindungslinien w entsprechender Punkte gehen, weil auch A_1B_2 und A_2B_1 zugehörige Punkte verbinden, durch den Kreuzungspunkt W dieser Geraden. Lassen wir w sich drehen und verbinden ihre Schnittpunkte mit C_1B_1 und C_1B_2 resp. mit A_1 und A_2, so beschreibt deren Kreuzungspunkt F den Kegelschnitt $(A_1A_2)(B_1B_2C_1)$. Halten wir nun in irgend einer Zwischenlage F_1 die Geraden A_1F und A_2F fest, lassen aber B_1C_1 und B_2C_1 beweglich werden, so beschreibt ihr Schnittpunkt C einen Kegelschnitt $(B_1B_2)(A_1A_2F_1)$, dem aber auch C_1 angehört, weil hier C seine Bewegung beginnt. C überschreitet F_1, wenn w die Lage WF_1 annimmt. Ein beliebiger Punkt F_1 des ursprünglichen Kegelschnittes gehört also auch demjenigen an, der, mit Hülfe der Strahlbüschel B_1 und B_2 erzeugt, durch die hinzukommenden Punkte A_1, A_2, C_1 sicher eindeutig bestimmt wird; beide sind daher mit einander identisch $[(A_1A_2)(B_1B_2C_1\ldots)$ und $(B_1B_2)(A_1A_2C_1\ldots)]$. Es ist mithin durch fünf Punkte nur ein Kegelschnitt möglich, und es sind überdies alle Strahlbüschel, die ihr Centrum auf dem Kegelschnitte haben und zu ihm perspectivisch sind, unter einander projectivisch.

Aus dem bewiesenen Satze folgen aber nach § 19 alle die Sätze, welche bei reellen Kegelschnitten allein unter Benutzung der verschiedenen Erzeugungsweisen derselben sich ableiten lassen; insbesondere folgt der Satz, dafs es in jedem Kegelschnittpunkte eine Tangente giebt, und dafs alle Tangenten auf zwei festen projectivische Punktreihen ausschneiden.

§ 121. Jede Gerade, welche nicht Tangente eines Kegelschnittes ist, begegnet ihm in zwei verschiedenen Punkten. Läfst man die Gerade um irgend einen ihrer Punkte sich drehen, so werden die Schnittpunktpaare von jedem seiner Punkte aus durch eine Involution zweiter Ordnung projicirt, welche zu dem Strahlbüschel projectivisch ist.

Diese Sätze sind im ersten Abschnitt des zweiten Capitels (§§ 25 und 26) bewiesen worden.

§ 122. Sind P und Q zwei dem Kegelschnitte nicht angehörige Punkte, so schneiden die Strahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ des Büschels P (mit dem Centrum P) in Punktepaaren, die von Q aus durch Paare einer zu ihm projectivischen Involution zweiter Ordnung und zweiten Ranges projicirt werden. Liegt P auf dem Kegelschnitt, so ist das zugehörige Gebilde eine (entartete) Involution erster Ordnung und zweiten Ranges.

Würde man die einzelnen Strahlen von Q ins Auge fassen, so hätte man die beiden Büschel P und Q als zwei-zweideutig bezogen zu betrachten[30].

Der Kegelschnitt kann durch zwei projectivische Strahlbüschel 73
$r_1 r_2 r_3 \ldots$ und $s_1 s_2 s_3 \ldots$ erzeugt werden, deren Centren R und S ihm angehören, aber aufserhalb der Geraden PQ liegen. Die Strahlen r_λ werden vom Büschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ in projectivischen Punktreihen getroffen. Dieselben werden von Q aus durch zu $p_1 p_2 p_3 \ldots$ projectivische Strahlbüschel

$$Q(PA_{\lambda 1} A_{\lambda 2} A_{\lambda 3} \ldots R) \qquad 1)$$

projicirt, die alle die Strahlen QP und QR entsprechend gemeinsam haben und daher zu einer Schaar gehören. Die Leitbüschel

$$Q(PA_{1\mu} A_{2\mu} A_{3\mu} \ldots R) \qquad 2)$$

sind alle zum Strahlbüschel $r_1 r_2 r_3 \ldots$ projectivisch und erzeugen mit ihm die Strahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$; das μte Büschel bestimmt den Strahl p_μ.

Die Strahlen s_λ werden ebenfalls durch das Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ in projectivische Punktreihen zerlegt; sie werden von Q aus durch Strahlbüschel

3) $$Q(P A'_{\lambda 1} A'_{\lambda 2} A'_{\lambda 3} \ldots S)$$

projicirt, die zu einander und zu den Reihen 1) projectivisch sind. Die letzteren haben alle QP und QS mit einander entsprechend gemein. In allen Reihen 1) und 3) entspricht QP sich selbst; dem gemeinsamen Strahle QS aller Reihen 3) gehören aber in den verschiedenen Reihen 1) wechselnde Strahlen zu. Die Büschel 3) gehören zu einer Schaar. Ihre Leitbüschel

4) $$Q(P A'_{1\mu} A'_{2\mu} A'_{3\mu} \ldots S)$$

sind ebenfalls zu einander, aber auch zu dem Büschel $s_1 s_2 s_3 \ldots$ projectivisch, mit dem zusammen speciell das μte den Strahl p_μ erzeugt. Da nun $r_1 r_2 r_3 r_4 \ldots$ und $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ zu einander projectivisch sind, so sind es auch je zwei entsprechende Leitbüschel 2) und 4). Ihre Coincidenzstrahlen QS_μ, QS'_μ führen nach den Schnittpunkten S_μ, S'_μ von p_μ mit dem Kegelschnitt. Diese werden daher von P aus durch die Strahlenpaare einer zu $p_1 p_2 p_3 \ldots$ projectivischen Strahleninvolution

$$Q(S_1 S'_1, S_2 S'_2, S_3 S'_3, S_4 S'_4, \ldots)$$

zweiter Ordnung und zweiten Ranges projicirt (§ 118). Dieselbe ist zunächst zn den projectivischen Involutionen der Schaaren 1) und 3) und damit zu dem Büschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ projectivisch.

§ 123. Zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 haben stets Schnittpunkte mit einander gemeinsam, und zwar im Allgemeinen und höchstens vier verschiedene.

Die projectivischen Strahlbüschel R und S, welche K_1 erzeugen, treffen K_2 in Punktepaaren, die von einem seiner Punkte O aus durch die Strahlenpaare zweier projectivischer Involutionen zweiter Ordnung und ersten Ranges projicirt werden (§ 121). Die vier Coincidenzstrahlen derselben (§ 32) projiciren die gesuchten Punkte. Daher giebt es stets solche Punkte, im Allgemeinen aber vier verschiedene.

Anmerkung. Wir hätten auch zwei Involutionen zweiten Ranges mit dem Centrum Q benutzen können, die zu demselben Strahlbüschel P projectivisch sind und mit ihm K_1 und K_2 erzeugen. Alle Coin-

cidenzstrahlen beider Involutionen, die außerhalb QP liegen, führen nach gemeinsamen Punkten beider Kegelschnitte. Doch ist das angewendete Verfahren bei Weitem einfacher.

§ 124. Durch zwei verschiedene Kegelschnitte K_1 und K_2 derselben Ebene ist ein Büschel K_1, K_2 von Kegelschnitten $K_1, K_2, K_3, K_4, \ldots$ bestimmt. Dieselben enthalten sämmtliche K_1 und K_2 gemeinsamen Punkte. Jeder andere Punkt gehört nur einem Kegelschnitte an. Auf allen Geraden, die von einem der ersteren ausgehen, bestimmen die Kegelschnitte projectivische Punktreihen. Sie treffen jede andere Gerade in den Punktepaaren einer Involution zweiter Ordnung und einen beliebigen Kegelschnitt in den Gruppen einer Involution vierter Ordnung. Alle diese Involutionen sind unter sich und mit den vorstehenden Punktreihen projectivisch. Den genannten Gebilden schließen sich noch als projectivisch die Tangentenbüschel in einfachen Grundpunkten an, wo also die gegebenen Kegelschnitte verschiedene Tangenten zeigen. Zu allen diesen Gebilden kann das Kegelschnittbüschel projectivisch gesetzt werden.

Beide Kegelschnitte haben (§ 123) wenigstens einen Punkt P gemeinsam. Wir können sie daher mit Hülfe eines Strahlbüschels P und zweier anderer dazu projectivischer mit den Centren O_1 und O_2 erzeugen. Die beiden zum Büschel P projectivischen Strahlbüschel O_1 und O_2 erzeugen einen Kegelschnitt K oder $R_1 R_2 R_3 \ldots$, der zu ihnen beiden perspectivisch ist. Die verschiedenen Strahlbüschel

$O_1(R_1 R_2 R_3 \ldots)$, $O_2(R_1 R_2 R_3 \ldots)$, $O_3(R_1 R_2 R_3 \ldots)$, $\ldots$ $O_\lambda(R_1 R_2 R_3 \ldots)$, $\ldots$

welche von Punkten $O_1, O_2, O_3, \ldots O_\lambda, \ldots$ der Curve K aus die Reihe $R_1 R_2 R_3 \ldots$ projiciren, erzeugen mit dem festen Strahlbüschel P die Kegelschnitte $K_1, K_2, K_3, \ldots K_\lambda, \ldots$ des genannten Büschels. Jeder K_1 und K_2 gemeinsame Punkt gehört einem Strahle p_ϱ und den beiden entsprechenden $O_1 R_\varrho$ und $O_2 R_\varrho$ gleichzeitig an. Er ist also mit R_ϱ identisch und gehört folglich auch allen anderen Kegelschnitten des Büschels an. Irgend einem Strahle p_μ gehören bei der Erzeugung der verschiedenen Kegelschnitte die Strahlen des Büschels $R_\mu(O_1 O_2 O_3 O_4 \ldots)$ zu. Die von $O_1 O_2 O_3 O_4 \ldots$ eindeutig abhängende Anordnung der K_λ schneidet daher auf allen von P ausgehenden Strahlen zu einander projectivische Punktreihen aus. Auf irgend einer Geraden l schneidet das Büschel P

eine Punktreihe $P_1 P_2 P_3 P_4 \ldots$ aus, und die verschiedenen Büschel O_1, $O_2, O_3, O_4, \ldots$ treffen dieselbe in eben so vielen unter einander und zu $P_1 P_2 P_3 P_4 \ldots$ projectivischen Punktreihen

$$Q_{11} Q_{21} Q_{31} Q_{41} \ldots \overline{\wedge}\ Q_{12} Q_{22} Q_{32} Q_{42} \ldots \overline{\wedge}\ Q_{13} Q_{23} Q_{33} Q_{43} \ldots \overline{\wedge} \ldots$$

Sie haben alle die beiden Schnittpunkte zwischen l und K entsprechend gemeinsam und gehören daher zu einer Schaar. Mit $P_1 P_2 P_3 \ldots$ bestimmen sie die Punktepaare einer bestimmten Involution zweiter Ordnung, welche zugleich von dem Büschel $K_1 K_2 K_3 K_4 \ldots$ auf l ausgeschnitten wird. Die Paare erscheinen in einer zu den Leitreihen

$$Q_{11} Q_{12} Q_{13} Q_{14} \ldots \overline{\wedge}\ Q_{21} Q_{22} Q_{23} Q_{24} \ldots \overline{\wedge}\ Q_{\varkappa 1} Q_{\varkappa 2} Q_{\varkappa 3} Q_{\varkappa 4} \ldots \overline{\wedge} \ldots$$

und also zu den Büscheln $R_\varkappa(O_1 O_2 O_3 O_4 \ldots)$ projectivischen Anordnung (§§ 25 und 26). Auf allen Geraden bestimmt das Kegelschnittbüschel Involutionen zweiter Ordnung, die zu einander projectivisch sind.

Hieraus ergiebt sich das Kegelschnittbüschel als unabhängig bestimmt von der Wahl der Hülfspunkte O_1 und O_2. Durch jeden beliebigen Punkt S geht ein Kegelschnitt K_λ des Büschels. Eine um S bewegte Gerade schneidet K_1 und K_2 in je zwei Punkten. Die Schnittpunkte zwischen l und K_λ bilden ein Glied der durch die ersteren Paare bestimmten Involution. Nach dieser Bestimmung ist es auch gleichgültig, welchen der gemeinsamen Punkte P von K_1 und K_2 man zur Bildung des Büschels verwendet.

Alle Kegelschnitte des Büschels bestimmen auf irgend einem anderen $\mathfrak{K}$ die Gruppen einer Involution vierter Ordnung. Denn die Punktepaare, welche $p_1, p_2, p_3, \ldots$ auf $\mathfrak{K}$ ausschneiden, werden von einem seiner Punkte Q aus durch Strahlenpaare einer projectivischen Involution zweiter Ordnung, ersten Ranges $Q(P_{11} P_{22} P_{33} \ldots)$ projicirt, wo also allgemein durch $QP_{\lambda\lambda}$ ein Strahlenpaar derselben bezeichnet wird. Die Punktepaare, welche $O_1(R_1 R_2 R_3 \ldots)$; $O_2(R_1 R_2 R_3 \ldots)$; $O_3(R_1 R_2 R_3 \ldots)$; $\ldots$ $O_\varkappa(R_1 R_2 R_3 \ldots)$ ausschneiden, werden durch eben so viele unter einander projectivische Involutionen zweiter Ordnung

$$Q(R_{11} R_{21} R_{31} \ldots) \overline{\wedge}\ Q(R_{12} R_{22} R_{32} \ldots) \overline{\wedge}\ Q(R_{13} R_{23} R_{33} \ldots) \overline{\wedge} \ldots \overline{\wedge}\ Q(R_{1\lambda} R_{2\lambda} R_{3\lambda} \ldots)$$

projicirt. Da nun diesen Reihen die Coincidenzstrahlen, welche nach den Schnittpunkten zwischen K und $\mathfrak{K}$ führen, gemeinsam sind, überdies aber

homologe Gruppen zu projectivischen Involutionen gehören, so sind alle jene Involutionen zweiter Ordnung und ersten Ranges Glieder einer Schaar (§ 73). Sie haben daher mit $Q(P_{11}P_{22}P_{33}\ldots)$ die Gruppen einer Involution vierter Ordnung gemeinsam (§ 74). Ihre Gruppen erscheinen projectivisch zu $Q(R_{\mu 1}R_{\mu 1}R_{\mu 3}\ldots)$, also auch projectivisch zu der Reihe $O_1 O_2 O_3 \ldots$ auf K, durch deren Punkte die Kegelschnitte des Büschels eindeutig fixirt werden können.

Ist P ein einfacher Schnittpunkt der Kegelschnitte K_1 und K_2, zeigen also diese und folglich alle Kegelschnitte des Büschels von einander verschiedene Tangenten, so ist das Büschel derselben projectivisch auf die Kegelschnittreihe $O_1 O_2 O_3$ bezogen. Diejenige t_λ des Kegelschnittes K_λ entspricht nämlich in dem festen Büschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ projectivisch dem Strahle $O_\lambda P$, welcher in noch einem Punkte R'_λ den Kegelschnitt K trifft. Zu der so entstehenden Reihe $R'_1 R'_2 R'_3 R'_4 \ldots$ ist also das Tangentenbüschel $t_1 t_2 t_3 t_4 \ldots$ des Kegelschnittbüschels projectivisch. Da aber R'_λ und O_λ ein Paar einer Involution bilden, so sind die Reihen $R'_1 R'_2 R'_3 R'_4 \ldots$ und $O_1 O_2 O_3 O_4 \ldots$ wieder unter sich und folglich mit dem Tangentenbüschel projectivisch. Wir können das Kegelschnittbüschel zu allen im Satze angegebenen Gebilden perspectivisch setzen, da diese alle unter einander projectivisch sind.

§ 125. Die concentrischen und projectivischen Strahleninvolutionen zweiter Ordnung und zweiten Ranges, welche zusammen mit einem festen Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ die Kegelschnitte $K_1, K_2, K_3, \ldots K_\lambda, \ldots$ eines Büschels erzeugen, gehören zu einer und derselben Schaar, die ihrerseits zu dem Büschel $K_1 K_2 K_3 \ldots K_\lambda \ldots$ projectivisch ist.

Die Punktepaare, welche $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ auf K_1, K_2, K_3 ausschneiden, mögen durch die drei zu einander projectivischen Involutionen zweiter Ordnung und zweiten Ranges (§ 122)

$$Q(R_1 R'_1, R_2 R'_2, R_3 R'_3, R_4 R'_4, \ldots),\ Q(S_1 S'_1, S_2 S'_2, S_3 S'_3, S_4 S'_4, \ldots)$$
$$Q(T_1 T'_1, T_2 T'_2, T_3 T'_3, T_4 T'_4, \ldots)$$

von Q aus projicirt werden. Man lege nun durch die Punkte T_1 und T_λ, welche nicht Grundpunkte des Büschels sind, einen beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$, welcher P und Q enthält. Derselbe wird, von speciellen Lagen abgesehen, in je vier verschiedenen Punkten K_1 und K_2 treffen.

The involution of 4th order is one common to the Schaar and linear pencil

Zu einer Gruppe der durch erstere auf $\mathfrak{K}'$ bestimmten Involution gehören T_1 und T_λ. Die besagten Gruppen werden von Q aus durch Gruppen $q_1^{(4)}, q_2^{(4)}, q_3^{(4)}$ einer Strahleninvolution vierter Ordnung und ersten Ranges projicirt. Sie sind den drei Involutionen zweiten Ranges mit dem Strahlbüschel $q_1 q_2 q_3 q_4 \ldots$ gemeinsam, das mit $p_1 p_2 p_3 \ldots$ zusammen $\mathfrak{K}'$ erzeugt und also zu den drei Involutionen zweiten Ranges projectivisch ist. Nach § 110 ist daher $Q(T_\lambda T_\lambda')$ eine Gruppe der Involution zweiter Ordnung und zweiten Ranges, die mit den ersten beiden zu einer Schaar gehört, und in der $Q(T_1 T_1')$ das entsprechende Paar zu $Q(R_1 R_1')$ und $Q(S_1 S_1')$ ist. Da nun T_λ ein beliebiger Punkt von K_3 ist, so folgt der behauptete Satz.

§ 126. Durch drei beliebige Kegelschnitte K_1, K_2, K_3, die nicht demselben Büschel angehören, ist ein Kegelschnittnetz zweiter Stufe bestimmt, dem erstens die Kegelschnitte $K_4, K_5, K_6, \ldots$ des Büschels K_2, K_3, zweitens alle Kegelschnitte $K_2', K_3', K_4', K_5', \ldots$ der Büschel $K_1, K_2; K_1, K_3; K_1, K_4; K_1, K_5; \ldots$ angehören[31].

Irgend zwei der genannten Kegelschnitte bestimmen ein ganz im Netze enthaltenes Büschel, und irgend zwei Büschel haben stets einen Kegelschnitt gemeinsam.

Zuerst hat das Büschel K_l', K_m' mit dem anderen K_2, K_3 oder K_l, K_n einen Kegelschnitt K gemeinsam. Man setze

$$K_1 K_l K_l' \ldots \barwedge K_1 K_m K_m' \ldots$$

Das Erzeugnifs der beiden Büschel besteht zum einen Theil aus dem Kegelschnitt K_1. Es sei S irgend ein Punkt des anderen Bestandtheils, s eine ihn enthaltende Gerade. Sie trifft die beiden Büschel in den projectivischen Involutionen

$$U_1 U_l U_l' \ldots \barwedge U_1 U_m U_m' \ldots$$

zweiter Ordnung und ersten Ranges. Die beiden Coincidenzpunkte S und S' aufserhalb U liegen auf der untersuchten Curve. Sie bilden gleichzeitig ein Paar der beiden Involutionen U_l, U_m und U_l', U_m' (§ 71). Nach der ersten Bestimmung durchläuft S' einen Kegelschnitt K des Büschels K_l, K_m (§ 124), nach der zweiten einen Kegelschnitt K des Büschels K_l', K_m'. Daher ist der zweite Bestandtheil des betrachteten Erzeugnisses ein beiden Büscheln gemeinsamer Kegelschnitt K.

Wir setzen nun

$$K K_l K_m K_n \ldots \barwedge K K_l' K_m' K_n' \ldots$$

Das Erzeugnifs dieser beiden Büschel ist aufser K ein Kegelschnitt, der zugleich den Büscheln K_l, K_l' und K_m, K_m' angehört und daher mit K_1 zusammenfällt. Er gehört aber auch mit irgend zwei entsprechenden Kegelschnitten zu einem Büschel, und daher mufs jedem der Büschel K_1, K_2; K_1, K_3; K_1, K_4; K_1, K_5; ... je ein Kegelschnitt $K_2', K_3', K_4', K_5', \ldots$ des Büschels K_l', K_m' angehören.

Es ist nun zwei beliebigen Büscheln des Netzes ein Kegelschnitt gemeinsam. Denn sie treffen die Büschel K_1, K_l und K_1, K_m in den Kegelschnitten K_l', K_l'' und K_m', K_m''. Dafs aber K_l', K_m' und K_l'', K_m'' einen Kegelschnitt gemeinsam haben, folgt aus dem ersten Theile unserer Entwickelung.

Offenbar steht das Kegelschnittnetz in genauester Verbindung zu der Ebene mit ihren Punkten und Geraden, oder zu dem Involutionsnetz zweiter Stufe. Alle Sätze, welche für das eine oder andere dieser Gebilde zweiter Stufe gelten, haben ihr Analogon im Kegelschnittnetz.

§ 127. Irgend $\mu + 1$ Kegelschnitte ($\mu + 1 \leqq 5$) $K_1, K_2, K_3, \ldots K_{\mu+1}$, die nicht zu demselben Netze $(\mu - 1)$ter Stufe gehören, bestimmen ein Kegelschnittnetz μter Stufe, dem erstens die Kegelschnitte $K_{\mu+2}, K_{\mu+3}, K_{\mu+4}, \ldots$ des Netzes $(\mu - 1)$ter Stufe $K_2 K_3 \ldots K_{\mu+1}$ und zweitens die Büschel K_1, K_2; K_1, K_3; ... K_1, K_μ; $K_1, K_{\mu+1}$; $K_1, K_{\mu+2}$; $K_1, K_{\mu+3}$; ... angehören. Jedes Netz, welches allein aus Gruppen des Netzes μter Stufe bestimmt werden kann, mufs ganz in demselben liegen. Zwei solche Netze αter und βter Stufe haben, wenn $\alpha + \beta$ nicht kleiner als μ ist, ein Netz $(\alpha + \beta - \mu)$ter Stufe gemeinsam, also einen Kegelschnitt, falls $\alpha + \beta$ gleich μ ist. Irgend ein Punkt der Ebene kommt in den Kegelschnitten eines Netzes $(\mu - 1)$ter Stufe vor. Alle Netze $(\alpha + 1)$ter Stufe, welche von demselben Netz αter Stufe ausgehen, werden zu einem Netzbündel $(\mu - \alpha - 1)$ter Stufe gerechnet, resp. zu einem Netzbüschel, wenn $\alpha = \mu - 2$ ist. Ein jedes Netzbündel bestimmt auf allen $(\mu - \alpha - 1)$fachen Netzen, die seinen Träger nicht enthalten, collineare, resp. projectivische Gebilde.

Der Satz ist eine Übertragung der Lehrsätze 81—84 in's Gebiet der Curvennetze. Das Theorem ergiebt sich aus § 126 ganz so, wie die citirten §§ aus § 77 folgten.

§ 128. Durch irgend zwei projectivische Kegelschnittbüschel

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots \;\overline{\wedge}\; V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$$

und ein zwei entsprechende Kegelschnitte verbindendes Büschel $U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots$ ist eine zu diesem perspectivische Schaar unter sich projectivischer Kegelschnittbüschel

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots \;\overline{\wedge}\; V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots \;\overline{\wedge}\; W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots \;\overline{\wedge}\; Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots \;\overline{\wedge} \ldots$$

bestimmt. Homologe Glieder ordnen sich zu projectivischen Leitbüscheln

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots \;\overline{\wedge}\; U_2 V_2 W_2 Z_2 \ldots \;\overline{\wedge}\; U_3 V_3 W_3 Z_3 \ldots \;\overline{\wedge}\; U_4 V_4 W_4 Z_4 \ldots \;\overline{\wedge} \ldots$$

an, zu denen eben desshalb die Schaar perspectivisch gesetzt werden kann[32].

Der Satz ist eine Umschreibung eines Specialfalles vom § 86. Um aber ein Beispiel für die Übertragung zu geben, wollen wir den Beweis hier führen. Es mögen zuerst U_1, U_2, V_1, V_2 ein Netz dritter Stufe bestimmen. Keine zwei der Büschel $U_1, V_1; U_2, V_2; U_3, V_3$ werden daher einen Kegelschnitt mit einander gemeinsam haben. Das Netz zweiter Stufe $W_1 U_2 V_2$ hat also (§ 127) mit dem Büschel U_3, V_3 einen Kegelschnitt W_3 gemein. Die beiden Büschel U_2, V_2 und W_1, W_3 haben, da sie demselben Netze zweiter Stufe angehören, einen gemeinsamen Kegelschnitt W_2. Die beiden Netzbüschel

$$(W_1, W_3)(U_1 U_2 U_3 \ldots) \;\overline{\wedge}\; (W_1, W_3)(V_1 V_2 V_3 \ldots)$$

sind mit einander identisch, da die drei Paare entsprechender Kegelschnitte $U_1, V_1; U_2, V_2; U_3, V_3$ je mit W_1, W_3 zu demselben Netze gehören. Je zwei entsprechende Kegelschnitte U_λ und V_λ der beiden Büschel

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots \;\overline{\wedge}\; V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$$

bestimmen daher ein Büschel U_λ, V_λ, welches mit W_1, W_3 je einen Kegelschnitt W_λ gemeinsam hat. Aus dem Gegebenen ist klar, daſs von jeder Curve $U_1, V_1, W_1, Z_1 \ldots$ des Büschels U_1, V_1 nur ein Büschel

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots, \; V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots, \; W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots, \; Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots, \ldots$$

ausgeht. Alle sind, da sie zu dem Netzbüschel W_1, W_2 z. B. perspectivisch sind, projectivisch. Aber auch die Leitbüschel

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots, \; U_2 V_2 W_2 Z_2 \ldots, \; U_3 V_3 W_3 Z_3 \ldots, \; U_4 V_4 W_4 Z_4 \ldots, \ldots$$

sind alle zu einander projectivisch, denn sie sind sämmtlich z. B. zu dem Netzbüschel U_2, V_2 perspectivisch.

Liegen $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ in demselben Netze zweiter Stufe, so setzen wir, wenn V_1 und U_1 nicht zusammenfallen, die beiden Büschel $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ und $V_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_4 \mathfrak{B}_5 \ldots$ hinsichtlich einer Curve V aufserhalb des Netzes perspectivisch, so dafs also V, V_λ, $\mathfrak{B}_\lambda$ zu einem Büschel gehören. Für die Büschel $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ und $V_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_4 \ldots$ gilt der aufgestellte Satz. Wenn man die Schaar projectivischer Büschel, die sie constituiren, und deren Leitbüschel von V aus auf $U_1 V_2 U_2$ projicirt, so erhält man zwei Reihen von Büscheln, die den Bedingungen des Satzes entsprechen. Es giebt aber auch in diesem Falle nur eine Schaar. Haben zuerst $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ eine Curve V entsprechend gemein, so ist sie allen anderen Büscheln mit den gegebenen gemeinsam, und diese sind also zweifellos bestimmt. Haben sie aber keine Gruppe gemeinsam, so gehört die U_2, V_2 und U_3, V_3 gemeinsame Curve X' keinem anderen Büschel U_4, V_4 an. Es mögen allgemein die Curven W_λ und W'_λ von U_2, V_2 und U_3, V_3 mit W_1 je in einem Büschel liegen. Setzt man nun

$$W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots \barwedge W_1 W'_2 W'_3 W'_4 \ldots \barwedge W_1 W''_2 W''_3 W''_4 \ldots,$$

so liegen W_4, W'_4, W''_4, X' in einem Büschel. Da nun U_4, V_4 X' nicht enthalten kann, so genügt allein das Büschel $W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$ den gestellten Bedingungen, weil W_4, X' und U_4, V_4 nur die Curve W_4 gemeinsam haben. Falls $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ nur verschiedene Anordnungen desselben Büschels sind, kann man sich auf § 19 berufen.

Zweiter Abschnitt.

Aufstellung von Lehrsätzen über allgemeine Curven nter Ordnung. *§§ 129—138.*

§ 129. Zwei zu einander projectivische Büschel von Curven $r$ter und $(n-r)$ter Ordnung erzeugen eine Curve $n$ter Ordnung, auf der sich nämlich je zwei entsprechende Curven der beiden Büschel durchschneiden. Wenn n in die Form $2m + \varepsilon$ gesetzt wird ($\varepsilon = \{{0 \atop 1}$), so sind m verschiedene Arten der Erzeugung von Curven $n$ter Ordnung zu unterscheiden.

Von diesen m Classen sind die beiden ersten ($r = 1$ und $r = 2$) mit einander identisch und umfassen alle übrigen. Jedoch kann nicht behauptet werden, dafs auch jede andere Classe alle übrigen umfafst.

§ 130. Wählt man auf einer Curve $n$ter Ordnung (K^n) einen Punkt S beliebig aus, so giebt es unendlich viele Büschel von Curven $(n-1)$-ter Ordnung K^{n-1}, die, projectivisch auf das Strahlbüschel S bezogen, mit ihm die Curve $n$ter Ordnung erzeugen. Die Grundpunkte eines jeden derartigen Büschels gehören sämmtlich der Curve an; man kann von ihnen im Allgemeinen um einen Punkt mehr willkürlich annehmen, als zur Bestimmung einer Curve $(n-2)$ter Ordnung hinreichen $\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]$.

Durch irgend vier Punkte der Curve, von denen keine drei in einer Geraden liegen, kann man ein Kegelschnittbüschel legen, das mit unendlich vielen auf dasselbe projectivisch bezogenen Büscheln von Curven $(n-2)$ter Ordnung zusammen die Curve $n$ter Ordnung erzeugt. Die Grundpunkte des letzteren Büschels liegen alle auf derselben, und man kann von ihnen im Allgemeinen um einen mehr willkürlich wählen, als zur Bestimmung einer Curve $(n-3)$ter Ordnung hinreichen $\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]$.

§ 131. Schneidet man die Curve $n$ter Ordnung durch die Strahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ eines Büschels mit dem Centrum P, so werden die so entstandenen Gruppen zu je n Punkten von Q aus durch Strahlengruppen $q_1^n, q_2^n, q_3^n, \ldots$ einer zu jenem Büschel projectivischen Involution $n$ter Ordnung und $n$ten Ranges projicirt. Wenn P und Q beide außerhalb der Curve gelegen sind, so entspricht dem Strahle PQ der $n$fach zählende QP.

Wenn P auf die Curve verlegt wird, so sinkt die Ordnung, wenn Q auf dieselbe gelangt, der Rang um eine Einheit herab. Im ersten Falle entspricht der Tangente in P eine Gruppe, in der QP vorkommt, im zweiten Falle entspricht dem Strahle PQ eine Gruppe, die aus dem $(n-1)$-fach zählenden Strahl QP und der Tangente in Q besteht.

Kann eine Curve durch ein beliebiges Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ und eine projectivische Strahleninvolution $q_1^n q_2^n q_3^n \ldots$ $n$ter Ordnung und $n$ten Ranges mit beliebigem Centrum Q erzeugt werden, so ist sie eine Curve $n$ter Ordnung nach der Definition des § 129.

§ 132. Zwei Curven $r$ter und $(n-r)$ter Ordnung können zusammen als Curve $n$ter Ordnung betrachtet werden.

§ 133. Zwei Curven von den Ordnungen m und n können nur dann unendlich viele Punkte mit einander gemeinsam haben, wenn entweder die eine die andere als Theil umfaſst und daneben noch eine Curve niedrigerer Ordnung als zweiten Theil enthält, oder wenn beide dieselbe Curve $r$ter Ordnung und daneben noch je eine Curve $(m-r)$ter resp. $(n-r)$ter Ordnung enthalten.

Im anderen Falle sind stets gemeinschaftliche Punkte, und zwar im Allgemeinen und höchstens mn verschiedene, vorhanden. Der letztere Fall tritt dann immer, aber auch nur dann ein, wenn in jedem vorhandenen gemeinsamen Punkte die beiden Curven bestimmte, aber von einander verschiedene Tangenten zeigen. Ist dies Merkmal bei s verschiedenen bekannten Schnittpunkten erfüllt, so sind noch andere gemeinsame Punkte vorhanden, falls s kleiner als mn ist.

§ 134. Werden zwei Gebilde von jedem Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ in Gruppen zu m resp. n Punkten zerlegt, diese aber von einem besonderen Punkte Q aus durch zwei projectivische Strahleninvolutionen $m$ter resp. $n$ter Ordnung und μten resp. νten Ranges projicirt, so haben dieselben im Allgemeinen und höchstens $m\nu + n\mu - \mu\nu$ gemeinsame Punkte auſserhalb Q. Dem Strahle PQ entspricht, wie auch P gewählt ist, eine Gruppe, in der QP μfach resp. νfach vorkommt, und in der daneben noch je eine unveränderliche Tangentengruppe von $m-\mu$ resp. $n-\nu$ Strahlen vorkommt. Sind nun diese von einander verschieden, so sind unter allen Umständen auſserhalb Q gemeinsame Punkte vorhanden; unter ihnen zählt jeder Punkt einfach, in dem beide Gebilde bestimmte, aber verschiedene Tangenten zeigen.

§ 135. Irgend zwei verschiedene Curven U und V $n$ter Ordnung bestimmen ein Büschel $UVWZ \ldots$ von Curven $n$ter Ordnung, dessen Curven sämmtliche Schnittpunkte von U und V mit einander gemeinsam haben. Ist S irgend ein U und V gemeinschaftlicher Punkt, und sind U und V die Erzeugnisse des Strahlbüschels $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ mit den Büscheln $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ von Curven $(n-1)$ter Ordnung, so bestimmen die Büschel $W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$, $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$, ... der durch $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ bestimmten Schaar mit $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ die übrigen Curven des Büschels $UVWZ \ldots$ von Curven $n$ter Ordnung.

Irgend ein Punkt, der nicht beiden Curven U und V gleichzeitig angehört, bestimmt eine durch ihn gehende Curve des Büschels.

Die Geraden der Ebene treffen eine bestimmte Anordnung von Curven $U, V, W, Z, \ldots$ eines Büschels in projectivischen Involutionen $n$ter Ordnung. Die Ordnung der genannten Involution sinkt um m Einheiten herab für Geraden, welche m Grundpunkte des Büschels enthalten. Zu den angegebenen Gebilden sind die Involutionen $2n$ter Ordnung projectivisch, welche das Büschel auf beliebigen Kegelschnitten ausschneidet, sowie die Tangentenbüschel in einfachen Grundpunkten, wo also U und V bestimmte, von einander verschiedene Tangenten zeigen.

Das Büschel von Curven $n$ter Ordnung wird durch Definition perspectivisch zu allen vorgenannten unter sich projectivischen Gebilden gesetzt.

Wenn unter den Grundpunkten eines Büschels U, V vier verschiedene sich finden, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so kann man die Curven des Büschels erzeugen mit Hülfe des durch sie gehenden Kegelschnittbüschels und der zu ihm projectivischen Büschel von Curven $(n-2)$ter Ordnung einer Schaar.

Zu einem Büschel gehören überhaupt diejenigen Curven K^n, welche mit einem festen und zu ihnen projectivischen Büschel von Curven K^r die Büschel von Curven K^{n-r} einer Schaar erzeugen. Das Büschel der K^n ist zu der Schaar projectivisch.

§ 136. Die Curven $n$ter Ordnung eines Büschels werden durch die Strahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ eines Büschels mit dem Centrum P in Punktgruppen zerlegt, die von Q aus durch eine Schaar zu einander projectivischer Strahleninvolutionen $n$ter Ordnung und $n$ten Ranges projicirt werden. Die Schaar ist zum Curvenbüschel projectivisch.

§ 137. Drei Curven K_1, K_2, K_3 $n$ter Ordnung constituiren ein Netz zweiter Stufe. Demselben gehören erstens die Curven $K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, \ldots$ des Büschels K_2, K_3, zweitens die Büschel $K_1, K_2; K_1, K_3; K_1, K_4; K_1, K_5; \ldots$ vollständig an. Irgend zwei Curven des Netzes bestimmen ein ganz in ihm liegendes Büschel. Irgend zwei Büschel des Netzes haben stets eine Curve gemeinsam.

Durch irgend $\mu+1$ Curven $n$ter Ordnung $K_1, K_2, K_3, \dots K_{\mu+1}$, die nicht einem Netze $(\mu-1)$ter Stufe angehören, ist ein Curvennetz μter Stufe bestimmt, dem erstens alle Curven $K_{\mu+2}, K_{\mu+3}, \dots$ des Netzes $K_2 K_3 \dots K_{\mu+1}$ $(\mu-1)$ter Stufe, zweitens die Büschel $K_1, K_2; K_1, K_3; \dots K_1, K_\mu; K_1, K_{\mu+1}; K_1, K_{\mu+2}; \dots$ angehören. Irgend ein Punkt gehört einem $(\mu-1)$fachen Netze des gegebenen an. Jedes aus Curven des gegebenen Netzes zu bildende Netz niedrigerer Stufe mufs ganz in ihm liegen. Zwei in letzterem enthaltene Theilnetze αter und βter Stufe haben eine Curve gemeinsam, wenn $\alpha+\beta=\mu$ ist, und ein Netz $(\alpha+\beta-\mu)$ter Stufe, wenn $\alpha+\beta>\mu$ ist. Netze gleicher Stufe können collinear bezogen werden.

Alle Netze $(\alpha+1)$ter Stufe eines μfachen Netzes, welche dasselbe Netz αter Stufe desselben enthalten, gehören zu einem Netzbündel $(\mu-\alpha-1)$ter Stufe. Alle zu ihm perspectivischen Netze $(\mu-\alpha-1)$ter Stufe, die mit seinem Träger keine Curve gemeinsam haben, sind zu einander collinear.

§ 138. Zwei zu einander projectivische Büschel $U_1 U_2 U_3 U_4 \dots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \dots$ von Curven $n$ter Ordnung und ein zwei entsprechende Curven verbindendes Büschel $U_1 V_1 W_1 Z_1 \dots$ bestimmen eine zu dieser perspectivische Schaar unter einander projectivischer Büschel

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \dots \barwedge V_1 V_2 V_3 V_4 \dots \barwedge W_1 W_2 W_3 W_4 \dots \barwedge Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \dots$$

Homologe Curven derselben liegen in projectivischen Leitbüscheln

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \dots \barwedge U_2 V_2 W_2 Z_2 \dots \barwedge U_3 V_3 W_3 Z_3 \dots \barwedge U_4 V_4 W_4 Z_4 \dots$$

angeordnet. Sie trifft Geraden und Kegelschnitte in Involutionsschaaren.

Dritter Abschnitt.

Übertragung der vorstehenden Resultate von n auf $n+1$. §§ 139—152.

Es sind alle aufgestellten Sätze mit alleiniger Ausnahme des im § 134 enthaltenen für $n=2$ und für $\mu=1$ bewiesen. Um für die durchzuführenden Inductionsschlüsse eine feste Basis zu haben, müssen wir also auch von diesem Satze den ersten Fall $(\mu=1)$ erledigen.

§ 139. Kann ein Gebilde als Erzeugnifs eines **beliebigen** Strahlbüschels P und einer dazu projectivischen Strahleninvolution $m$ter Ordnung mit dem Centrum Q bezeichnet werden, so mufs nothwendig bei jeder Erzeugungsweise dem Strahle PQ die Zusammenstellung aus $m-1$ festen Strahlen und dem Strahle QP entspechen. Wenn P auf die Curve fällt, wird allen Gruppen der Involution QP gemeinsam. In der übrig bleibenden Involution $(m-1)$ter Ordnung entspricht dem Strahle PQ die ihn nicht enthaltende Tangentengruppe. Zwei Curven $m$ter und $n$ter Ordnung, deren Tangentengruppen in Q keine gemeinsamen Strahlen haben, besitzen stets gemeinsame Punkte, und zwar im Allgemeinen und höchstens $m+n-1$ verschiedene. Zeigen in s $(< m+n-1)$ verschiedenen gemeinsamen Punkten beide Curven bestimmte, aber von einander verschiedene Tangenten, so sind noch andere Schnittpunkte vorhanden.

Es sei P_1 ein beliebiger Punkt aufserhalb P. Zu dem Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 p_4 \dots$ ist hinsichtlich p'_λ ein Strahlbüschel $q_{\lambda 1} q_{\lambda 2} q_{\lambda 3} q_{\lambda 4} \dots$ perspectivisch, welches mit der $p_1 p_2 p_3 p_4 \dots$ zugehörigen Involution $m$ter Ordnung eine Strahlengruppe einer Involution $(m+1)$ter Ordnung gemeinsam hat, weil die verschiedenen Strahlbüschel (q_λ) alle QP und QP_1 gemeinsam haben und daher zu einer Schaar gehören (§ 32). Alle Strahlen p'_λ sollen aber mit der Curve doch nur n Punkte gemeinsam haben; dieser Widerspruch löst sich nur dann, wenn in der PQ zugehörenden Involutionsgruppe QP vorkommt. Dann kommt QP in allen Gliedern der Involution $(m+1)$-ter Ordnung vor, und wenn wir von diesem erst künstlich hineingebrachten Bestandtheil absehen, so wird die Curve auch durch $p'_1 p'_2 p'_3 \dots$ und eine zu ihm projectivische Involution $m$ter Ordnung erzeugt. Speciell für $P_1 Q$ wird aber allen Strahlen $p_1, p_2, p_3, \dots$ und folglich allen Gliedern der Involution QP_1 zugeordnet; dem einen Strahl PQ und also der Tangengruppe q^{m-1} wird jeder Strahl q zugeordnet. Dem Strahl $P_1 Q$ gehört mithin die Gruppe aus q^{m-1} und QP_1 zu. Läfst man nun P_1 auf die Curve fallen, so wird allen Gliedern der Involution QP_1 gemeinsam sein. Sieht man von ihm ab, so bleibt eine Involution $(m-1)$ter Ordnung übrig, in der $P_1 Q$ die Gruppe q^{m-1} zugeordnet wird.

Wenn eine zweite Curve durch ein Strahlbüschel P und eine projectivische Involution Q $n$ter Ordnung erzeugt wird, so verlege man in einem Punkt der ersten Curve, der nicht zugleich der zweiten angehört,

das gemeinsame Centrum des Strahlbüschels. Wir erhalten für die erste Curve entsprechend eine projectivische Involution $(m-1)$ter Ordnung, für die andere eine solche $n$ter Ordnung; bei der ersteren Curve entspricht PQ nur die Tangentengruppe in Q, bei der zweiten aber ihre Tangentengruppe in Q, vermehrt um den Strahl QP. Sind nun beide Tangentengruppen von einander verschieden, so mufs jeder der höchstens $m+n-1$ Coincidenzstrahlen nach einem gemeinsamen Punkte beider Curven führen, und es sind solche gemeinsamen Punkte unter allen Umständen vorhanden.

Wir verschieben nun die Strahleninvolution $n$ter Ordnung zu sich selbst projectivisch unendlich wenig, halten aber die QP enthaltende Gruppe fest und irgend eine andere, die keinen der gemeinsamen Punkte enthält. Mit $p_1 p_2 p_3 \ldots$ erzeugen alle diese Involutionen Curven $n$ter Ordnung. Nach ihren gemeinsamen Punkten mit der Curve $m$ter Ordnung führen die Gruppen einer bestimmten Strahleninvolution $(m+n-1)$ter Ordnung; sie haben daher mit derselben $m+n-1$ verschiedene Punkte gemeinsam, die alle bei den untersuchten sich finden (§ 36a).

Man kann nun die gegebenen Curven $m$ter und $n$ter Ordnung durch ein Strahlbüschel S erzeugen, das irgend einen ihrer Schnittpunkte zum Centrum hat, und zwei Strahleninvolutionen $(m-1)$ter und $(n-1)$ter Ordnung mit dem Centrum Q. QS kommt in den Gruppen vor, die den Tangenten in S entsprechen. Sind diese verschieden, so ist QS kein Coincidenzstrahl der letzteren projectivischen Involutionen und kein Strahl der zu QS in der erwähnten Involution $(m+n-1)$ter Ordnung gehörenden Ergänzungsgruppe. Diejenige Ergänzungsgruppe, welche zu dem Nachbarstrahle von QS gehört, liegt aber der ersteren nahe, und alle ihre $m+n-2$ von einander verschiedenen Strahlen sind daher von QS endlich entfernt. Also zählen unter den gesuchten Punkten alle die einfach, in denen beide Curven von einander verschiedene Tangenten haben, und neben $s(< m+n-1)$ einfachen Schnittpunkten sind noch andere, einfache oder mehrfache, vorhanden.

§ 140—142. Von den gemeinsamen Punkten der Curven.

§ 140. Soll ein vorliegendes Gebilde mit Hülfe eines beliebigen Strahlbüschels $PQ, p_2, p_3, p_4, \ldots$ mit dem Centrum P und einer projectivischen Strahleninvolution $q_1^m, q_2^m, q_3^m, q_4^m, \ldots$ $m$ter Ordnung und μten Ranges

mit dem festen Centrum Q erzeugt werden können, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dafs letztere mit jedem projectivischen Strahlbüschel $QP, q_2, q_3, q_4, \ldots$ $m+\mu$ Strahlen gemeinsam hat, von denen bei QP μ vereinigt sind.

Die Strahlbüschel $PQ, p_2, p_3 \ldots$ und $QP, q_2, q_3 \ldots$ erzeugen eine Gerade $r . m$ der $m+\mu$ Coincidenzstrahlen zwischen $QP, q_2, q_3, q_3, \ldots$ und $q_1^m, q_2^m, q_3^m, q_4^m, \ldots$, projiciren die m Punkte, welche r nach der Voraussetzung allein mit der Curve gemeinsam hat; die μ übrigen müssen daher auf den Strahl QP entfallen, der allein bei der gedachten Erzeugungsweise zu dem Gebilde hinzutreten kann. Diese Bedingung ist aber, wie nothwendig, so auch hinreichend. Auf den Strahlen r_λ eines Büschels R schneidet das Büschel $PQ, PR, p_3, p_4, \ldots p_\varrho, \ldots$ Punktreihen aus, welche von Q aus durch projectivische Büschel

$$1) \qquad QP, QR, q_{\lambda 3}, q_{\lambda 4}, \ldots q_{\lambda\varrho}, \ldots$$

einer Schaar projicirt werden. Die Schaar selbst ist zu $r_1 r_2 r_3 r_4 \ldots r_\lambda \ldots$ projectivisch, weil dies mit ihren Leitbüscheln

$$2) \qquad q_{1\varrho}, q_{2\varrho}, q_{3\varrho}, q_{4\varrho} \ldots q_{\lambda\varrho} \ldots$$

der Fall ist. Wir betrachten nun ein Gebilde

$$q_{11}^{m-1} q_{12}^{m-1} q_{13}^{m-1} q_{14}^{m-1} \ldots$$

$(m-1)$ter Ordnung und $(\mu-1)$ten Ranges, das mit jedem Strahlbüschel $QP, q_2, q_3, q_4, \ldots$ $\mu-1$ bei QP gelegene Strahlen gemeinsam hat. Mit dem speciellen Büschel $QP, QR, q_{13}, q_{14}, \ldots q_{1\varrho}$, das mit $PQ, PR, p_3, p_4, \ldots p_\varrho, \ldots$ den Strahl r_1 erzeugt, soll es noch $m-1$ Strahlen gemeinsam haben, die nach Schnittpunkten zwischen r_1 und dem gegebenen Gebilde führen; der letzte Schnittpunkt soll mit R zusammen fallen. Nach § 119 kann dann $q_1^m q_2^m q_3^m q_4^m \ldots$ als das Erzeugnifs zweier projectivischer Schaaren

$$1) \; QP, QR, q_{13}, q_{14}, \ldots \;\overline{\wedge}\; QP, QR, q_{23}, q_{24}, \ldots \;\overline{\wedge}\; QP, QR, q_{33}, q_{34}, \ldots$$

$$2) \; q_{11}^{m-1}, q_{12}^{m-1}, q_{13}^{m-1}, q_{14}^{m-1}, \ldots \;\overline{\wedge}\; q_{21}^{m-1}, q_{22}^{m-1}, q_{23}^{m-1}, q_{24}^{m-1}, \ldots \;\overline{\wedge}\; q_{31}^{m-1}, q_{32}^{m-1}, q_{33}^{m-1}, q_{34}^{m-1}, \ldots$$

betrachtet werden; die Gruppe q_ϱ^m ist die Coincidenzgruppe der beiden projectivischen Leitinvolutionen

$$3) \qquad q_{1\varrho} q_{2\varrho} q_{3\varrho} q_{4\varrho} \ldots \;\overline{\wedge}\; 4) \; q_{1\varrho}^{m-1} q_{2\varrho}^{m-1} q_{3\varrho}^{m-1} q_{4\varrho}^{m-1} \ldots$$

Somit gehören die drei Involutionen μten Ranges
$QPq_{11}^{m-1}, QRq_{12}^{m-1}, q_{\lambda 3}q_{13}^{m-1}, \ldots; q_1^m, q_2^m, q_3^m, \ldots; QPq_{\lambda 1}^{m-1}, QRq_{\lambda 2}^{m-1}, q_{13}q_{\lambda 3}^{m-1}, \ldots$
zu einer Schaar projectivischer Involutionen (§ 118). Sie haben daher mit einem beliebigen Strahlbüschel $QP, q_2, q_3, q_4, \ldots$ Gruppen einer Involution $(m+\mu)$ter Ordnung gemeinsam. Da nun von den ersten beiden Gruppen μ Strahlen mit QP zusammenfallen, so mufs dasselbe bei der letzten der Fall sein. Die letztere Gruppe besteht aber aus den Coincidenzstrahlen von $QP, QR, q_{13}, q_{14}, \ldots$ mit dem Strahlbüschel $QP, q_2, q_3, q_4, \ldots$, unter denen ersichtlich QP vorkommt, und aus denen zwischen $QP, q_2, q_3, q_4, \ldots$ und $q_{\lambda 1}^{m-1}, q_{\lambda 2}^{m-1}, q_{\lambda 3}^{m-1}, q_{\lambda 4}^{m-1}, \ldots$, unter welchen daher QP $(\mu-1)$fach vorkommt. Man bringe nun die Gebilde $q_{\lambda 1}^{m-1} q_{\lambda 2}^{m-1} q_{\lambda 3}^{m-1} \ldots$ mit dem einen Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ zur Coincidenz. Die so entstehende Reihe von Gebilden R_1^{m-1} $R_2^{m-1} R_3^{m-1} R_4^{m-1} \ldots$ erzeugt mit dem Strahlbüschel $r_1 r_2 r_3 r_4 \ldots$ zusammen die zu betrachtende Curve.

Von hier aus kann man nun den vorher eingeschlagenen Weg rückwärts machen, nachdem man statt $q_1 q_2 q_3 \ldots$ ein anderes Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 \ldots$ substituirt hat. Da man für die Gebilde R^{m-1} den Satz voraussetzen kann, der für den μten Rang zu erweisen ist, so kann man die R_λ^{m-1} durch ein beliebiges Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ und zu einander projectivische Involutionen $(m-1)$ter Ordnung und $(\mu-1)$ten Ranges des Centrums Q

$$s_{\lambda 1}^{m-1} s_{\lambda 2}^{m-1} s_{\lambda 3}^{m-1} s_{\lambda 4}^{m-1} \ldots \qquad 5)$$

erzeugen. Sie gehören zu einer Schaar projectivischer Involutionen. Irgend ein durch P und Q gelegter Kegelschnitt K trifft die Curvenreihe $R_1^{m-1} R_2^{m-1}$ $R_3^{m-1} \ldots$ in einer zu $r_1 r_2 r_3 \ldots$ projectivischen Involution $(m+\mu-2)$-ter Ordnung. Diese Schnittgruppen werden nämlich ausgeschnitten durch die Coincidenzgruppen zwischen den Involutionen $q_{\lambda 1}^{m-1} q_{\lambda 2}^{m-1} q_{\lambda 3}^{m-1} q_{\lambda 4}^{m-1} \ldots$ und dem Strahlbüschel $q_1 q_2 q_3 q_4 \ldots$, das mit $p_1 p_2 p_3 p_4 \ldots$ zusammen K erzeugt. Geht K auch noch durch S, so sind die Gruppen auch $s_{\lambda 1}^{m-1} s_{\lambda 2}^{m-1}$ $s_{\lambda 3}^{m-1} s_{\lambda 4}^{m-1} \ldots$ mit dem Strahlbüschel $q_1' q_2' q_3' q_4' \ldots$ gemeinsam, das zu K bezüglich $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ perspectivisch ist. Hieraus kann man folgern (vergl. § 111), dafs man es mit einer zu $r_1 r_2 r_3 \ldots$ projectivischen Schaar unter sich und zu $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ projectivischer Involutionen $(m-1)$ter Ordnung, $(\mu-1)$ten Ranges zu thun hat.

Nun erzeugt man weiter die Strahlen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ mit Hülfe des

Strahlbüschels $s_1 s_2 s_3 \dots$ und der perspectivischen Büschel Q einer Schaar, die mit ihren Leitbüscheln zu $r_1 r_2 r_3 \dots$ projectivisch ist. Das s_ϱ entsprechende bringt man mit der zugehörigen Leitinvolution $s_{1\varrho}^{m-1} s_{2\varrho}^{m-1} s_{3\varrho}^{m-1} \dots$ zur Coincidenz und erhält so eine zu $s_1 s_2 s_3 \dots$ projectivische Involution $s_1^m s_2^m s_3^m \dots$ $m$ter Ordnung, μten Ranges, die mit jenem Strahlbüschel das vorliegende Gebilde erzeugt.

Natürlich braucht man, um diese letzteren Gruppen herzustellen, nicht den soeben angezeigten complicirten Weg einzuschlagen, vielmehr genügt es, zu s_λ die beiden Büschel $p_1 p_2 p_3 p_4 \dots$ und $q_{\lambda 1} q_{\lambda 2} q_{\lambda 3} q_{\lambda 4} \dots$ perspectivisch zu setzen. s_λ^m besteht dann aus den m Strahlen, die $q_{\lambda 1} q_{\lambda 2} q_{\lambda 3}$ $q_{\lambda 4} \dots$ und $q_1^m q_2^m q_3^m q_4^m \dots$ aufserhalb QP gemeinsam haben.

Dies wird nun speciell auf SQ angewendet. Allen Strahlen $p_1, p_2, p_3, \dots$ und mithin allen Gruppen $q_1^m, q_2^m, q_3^m, \dots$ gehört der eine Strahl QS zu. Da nun μ Glieder der Involution QS enthalten, so zählt diese Gerade μfach in der SQ zugehörenden Gruppe. Andererseits gehört dem Strahle PQ und der ihm entsprechenden Gruppe q^m jeder Strahl q zu. q^m bildet mithin den zweiten Theil der gesuchten Gruppe. Wir haben hiervon den Strahl QP abzulösen, der in q^m jedenfalls μfach auftritt. Bei jeder beliebigen Erzeugung, von S und Q aus, gehört also SQ eine Gruppe zu, in der QS μfach vorkommt, und aufserdem eine bestimmte Gruppe von $m-\mu$ Strahlen, die von S unabhängig ist und als die Tangentengruppe in Q bezeichnet wird.

Auf ähnliche Weise, wie vorher, kann gezeigt werden, dafs die Curve durch das beliebige Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 \dots$ und eine projectivische Involution $t_1^m t_2^m t_3^m \dots$ des Ranges und der Ordnung m erzeugt werden kann, wo S und T beliebig aufserhalb der Curve liegen, und in T keine Tangentengruppe stattfindet. Gelangt S resp. T auf die Curve, so sinkt Ordnung oder Rang um eine Einheit. Im letzteren Fall erhält man in T eine bestimmte Tangente, im ersteren aber eine Gerade s, der, wie immer T gewählt ist, eine Gruppe entspricht, in der TS vorkommt. Sie deckt sich mit der Tangente, welche man nach unserer Definition in S erhält, wenn man T und S vertauscht. Die Tangente in irgend einem Curvenpunkte S trifft in einem Punkte weniger die Curve aufserhalb S, als alle anderen Geraden durch S, wofern sie nicht der Curve ganz angehört. Für besondere Punkte des Gebildes kann die Ordnnug der In-

volution um ϱ Einheiten herabsinken. In diesem Falle giebt es in Q nicht eine bestimmte, sondern eine Gruppe von ϱ Tangenten.

§ 141. Sind in einer Ebene zwei Gebilde I und II gegeben, auf denen jedes Strahlbüschel der Ebene Gruppen zu m resp. n Punkten ausschneidet, die von einem bestimmten Centrum Q aus durch die Strahlengruppen zweier zu jenem projectivischer Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges resp. $n$ter Ordnung und νten Ranges projicirt werden, so sind im Allgemeinen und höchstens $m\nu + n\mu - \mu\nu$ gemeinsame Punkte vorhanden, wenn es Strahlen giebt, die in m resp. n verschiedenen Punkten die beiden Gebilde treffen, beide nicht etwa einen Bestandtheil gemeinsam haben und in Q verschiedene Tangentengruppen zeigen.

Sind s verschiedene gemeinsame Punkte nachgewiesen, in deren jedem die Gebilde zwei bestimmte, aber von einander verschiedene Tangenten zeigen, so sind noch andere gemeinsame Punkte vorhanden, wenn s kleiner als $m\nu + n\mu - \mu\nu$ ist.

Nach § 115 giebt es nur einzelne Strahlen q, die in weniger als μ resp. ν verschiedenen Punkten den beiden Gebilden begegnen, und in jedem Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ nach § 114 nur einzelne, welche die Curven in weniger als m resp. n verschiedenen Punkten treffen. Ist ν kleiner als μ, so ergänzen wir die zweite Curve durch $\mu - \nu$ verschiedene Geraden, die weder Q, noch einen anderen gemeinsamen Punkt der beiden Curven enthalten. Die Gebilde zusammen können durch das Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ und eine projectivische Involution der Ordnung $n + \mu - \nu$ und des Ranges μ dargestellt werden. Wir legen nun durch P einen Strahl p, der in $m + n + \mu - \nu$ verschiedenen Punkten $A_1, A_2, \ldots A_m$; $B_1, B_2, \ldots B_n$; $B_{n+1}, \ldots B_{n+\mu-\nu}$ den beiden gegebenen Curven und den $\mu - \nu$ Zusatzgeraden begegnet. Wir nehmen ferner an, was nach dem Gesagten statthaft ist, daſs die Geraden QA_λ dem Gebilde I in je μ und die Geraden QB_ϱ dem Gebilde II in je $\nu - 1$ resp. ν verschiedenen Punkten begegnen. Die Strahlen $QB_1, QB_2, \ldots QB_{\nu+\mu-\nu}$ fügen wir allen Gruppen der Involution $m$ter und die Strahlen $QA_1, QA_2, \ldots QA_m$ allen Gruppen der Involution $(n + \mu - \nu)$ter Ordnung hinzu. So entstehen zwei projectivische Involutionen

$$1)\ p'_1 p'_2 p'_3 \ldots \quad \text{und} \quad 2)\ q'_1 q'_2 q'_3 \ldots$$

der Ordnung s oder $m+n+\mu-\nu$ und des Ranges μ. Auch ihre Erzeugnisse mit $p_1p_2p_3\ldots$ werden als Curve 1) und 2) bezeichnet. Da nun diese Involutionen eine Gruppe entsprechend gemeinsam haben, so giebt es in der durch beide bestimmten Schaar eine Involution

3) $$r_1^s r_2^s r_3^s \ldots,$$

die sich auf den Rang $\mu-1$ reducirt, und in der die p zugehörige Gruppe vollständig unbestimmt wird. Mit $p_1p_2p_3\ldots$ erzeugt sie daher erstens die ganze Gerade p. Das Gebilde III, welches die Involution 3) $(\mu-1)$-ten Ranges mit $p_1p_2p_3\ldots$ gemeinsam hat, geht durch alle gemeinsamen Punkte von 1) und 2) mit alleiniger Ausnahme der Punkte $A_1,\ldots A_m, B_1,\ldots B_{n+\mu-\nu}$ selbst. Nun haben die drei Involutionen 1), 2), 3), mit jedem zu ihnen projectivischen Strahlbüschel $q_1q_2q_3\ldots$ die Gruppen einer Involution $(s+\mu)$ter Ordnung, ersten Ranges gemeinsam. Ist nun das Erzeugniſs der projectivischen Büschel $p_1p_2p_3\ldots$ und $q_1q_2q_3\ldots$ eine Gerade, sind also QP und PQ entsprechende Geraden, so hat $q_1q_2q_3\ldots$ mit den gegebenen beiden Involutionen je μ nach QP fallende Strahlen gemeinsam. Die betrachteten Punktgebilde haben daher mit jeder Geraden die Gruppen einer Involution $s$ter Ordnung gemeinsam. Also muſs sich, wenn man von der Geraden p absieht, das untersuchte Gebilde III auf die $(s-1)$te Ordnung reduciren. Die Gruppen der Involution 3) müssen sich bei der Deduction mit dem allen Gruppen gemeinsamen Strahle QP ergeben, von dem abgesehen wird.

Das ganze Curvengebilde 3) wird erhalten, wenn wir um irgend einen Punkt C desselben eine Gerade l sich drehen lassen und allemal die durch C bestimmte Gruppe der Involution $s$ter Ordnung aufsuchen, welche auf l durch die beiden Gebilde 1) und 2) bestimmt wird. Die letzteren können aber auch als die Erzeugnisse eines Strahlbüschels $t_1t_2t_3\ldots$ und zweier projectivischer Involutionen $s$ter Ordnung, μten Ranges

4) $$\mathfrak{p}_1^s\mathfrak{p}_2^s\mathfrak{p}_3^s\ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}_1^s\mathfrak{q}_2^s\mathfrak{q}_3^s\ldots$$

dargestellt werden; in dieser Schaar giebt es eine Involution $\mathfrak{r}_1^s\mathfrak{r}_2^s\mathfrak{r}_3^s\ldots$, deren TC zugehörige Gruppe den Strahl QC enthält. Da alle drei Involutionen mit irgend einem Strahlbüschel $\mathfrak{q}_1'\mathfrak{q}_2'\mathfrak{q}_3'\ldots$ die Gruppen einer Involution $(s+\mu)$ter Ordnung gemeinsam haben, von denen μ Strahlen in QS vereinigt liegen, wenn $t_1t_2t_3\ldots$ und $\mathfrak{q}_1'\mathfrak{q}_2'\mathfrak{q}_3'\ldots$ eine Gerade l erzeugen, so

schneidet jede Gerade auf den gegebenen Gebilden 1) und 2) und dem Erzeugniſs von $t_1 t_2 t_3 \ldots$ und einer dritten Involution der Schaar 4) die Gruppen einer Involution $s$ter Ordnung aus. Da sonach das Gebilde 3) mit dem Erzeugniſs von $t_1 t_2 t_3 \ldots$ und $\mathfrak{r}_1' \mathfrak{r}_2' \mathfrak{r}_3' \ldots$ sich deckt, so muſs von der Involution $[\mathfrak{r}]$ als Bestandtheil das Strahlbüschel sich ablösen, welches zu p hinsichtlich $t_1 t_2 t_3 \ldots$ perspectivisch ist. Die übrig bleibende Involution $(s-1)$ter Ordnung, $(\mu-1)$ten Ranges erzeugt mit $t_1 t_2 t_3 \ldots$ die Curve III, welche sicherlich mit den gegebenen I und II alle ihre Schnittpunkte auſserhalb p gemeinsam hat. Sie geht aber auch mit der Geraden p zusammen durch alle Schnittpunkte von 1) und 2). Nun unterscheidet sich aber 1) von I um die $n+\mu-\nu$ Geraden $QB_1, QB_2, \ldots QB_n, QB_{n+1}, \ldots QB_{n+\mu-\nu}$. Diese haben insgesammt $(n+\mu-\nu)\nu$ Schnittpunkte mit II gemeinsam, welche also 3) sämmtlich enthalten muſs. Die Gerade p enthält die n Punkte $B_1, B_2, \ldots B_n$; die $(n+\mu-\nu)\nu - n$ übrigen müssen sämmtlich III und II gemeinsam sein. Setzen wir nun unseren Lehrsatz für die Gebilde II und III, die nothwendig verschiedene Tangentengruppen in Q haben, voraus, wie er für die Zahlen $\mu = 1$, $\nu = 1$ gilt (§ 139), so ergiebt sich für I und II h ö c h s t e n s folgende Anzahl gemeinsamer Punkte

$$(m+n+\mu-\nu-1)\nu + n(\mu-1) - (n+\mu-\nu)\nu + n - (\mu-1)\nu$$
$$= m\nu + n\mu - \mu\nu.$$

Um sicher zu sein, daſs im Allgemeinen diese Anzahl wirklich richtig ist, und daſs jedenfalls gemeinsame Punkte immer vorhanden sind, muſs man noch zeigen, daſs III die Punkte $B_1, B_2, \ldots B_n$ n i c h t enthält, in den Punkten B_λ' bestimmte andere Tangenten zeigt als II und auch da eine bestimmte Tangente haben muſs, wo I und II bestimmte, aber getrennte Tangenten hatten. In einem solchen Punkte P giebt es e i n e Gerade t_1, die Tangente von I, welche die Curve 1 in nur noch $s-2$ anderen Punkten trifft, während einer der gewöhnlichen $s-1$ Schnittpunkte nach P fällt. Da nun die Curve II P zum einfachen Punkt hat, und in ihm eine andere Tangente besitzt als I, so wird t_1 von 2) in $s-1$ Punkten auſserhalb P geschnitten. Die drei Gruppen, welche t_1 auſserhalb P auf 1), 2) und 3) ausschneidet, liegen aber in Involution, die letzte dieser Gruppen besteht also aus $s-1$ von P verschiedenen Punkten. Daher hat auch III oder 3) in P eine bestimmte Tangente t_3, die gleichmäſsig von

t_1 und t_2 verschieden ist. Jede Gerade, die durch einen der Punkte B_λ oder B'_μ geht, trifft, da diese Punkte aufserhalb I liegen, die Curve 1 in $s-1$ von B_λ oder B'_μ verschiedenen Punkten; die Curve II aber hat in jedem Punkte B_λ eine Tangente, die von p und $B_\lambda Q$ verschieden ist, weil p in den $n-1$ anderen Punkten $B_1, \ldots B_{\lambda-1}, B_{\lambda+1} \ldots B_n, B_\lambda Q$ aber $m-\nu$ bei Q vereinigten und in $\nu-1$ anderen Punkten B'_λ die Curve noch trifft. Auf dieser Tangente schneidet 2) $s-1$ Punkte aus, unter denen B_λ vorkommt; die Curve 3) trifft sie daher in einer Gruppe von $s-1$ anderen Punkten. Da B_λ auf p liegt, gehören sie sämmtlich der Curve III an, die also $B_1, B_2, B_3, \ldots B_n$ nicht enthält. Die Curve I hat aber auch in den Punkten $B'_\lambda, B'_{n+\lambda}, B''_{n+\lambda}, \ldots$ eine bestimmte von QB'_λ, $QB'_{n+\lambda}, QB''_{n+\lambda}, \ldots$ verschiedene Tangente, welche 3 noch in je $s-1$ verschiedenen Punkten trifft, unter denen $B'_\lambda, B'_{n+\lambda}, B''_{n+\lambda} \ldots$ nicht mehr vorkommen. Einer von den je $s-1$ Punkten entfällt aber auf p. Daher hat III in allen Punkten $B'_\lambda, B'_{n+\lambda}, B''_{n+\lambda}, \ldots$ bestimmte und andere Tangenten als II. Die Tangentengruppe in Q gehört, wenn G und H die gegebenen sind, der Involution

$$GQ(B_1 B_2 \ldots B_n B_{n+1} \ldots R_{n+\mu-\nu}) \; ; \; HQ(A_1 A_2 \ldots A_m)$$

an und hat daher mit $HQ(B_1 B_2 B_3 \ldots B_n)$ keine Gerade gemeinsam.

Die Involution $(s-1)$ter Ordnung und $(\mu-1)$ten Ranges, welche, damit III entsteht, auf irgend ein Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ bezogen werden mufs, kann in verschiedene Theile zerfallen, und es kann eine unveränderliche Gruppe von ϱ Strahlen q sich ablösen. Auch das Gebilde III zerfällt dann in mehrere Bestandtheile und in jene Gruppe von ϱ Geraden; unter diesen aber können $QB_1, \ldots QB_n$ nicht vorkommen, da $B_1, B_2, \ldots B_n$ III nicht angehören. Schneidet QB_1 noch in $B'_1, B''_1, \ldots B_1^{(\nu-1)}$, so liegt der Strahl QB in den Gruppen, die $PB'_1, PB''_1, \ldots PB_1^{(\nu-1)}$ zugehören. QB_1 trifft aber die $\mu-\nu$ Geraden, durch welche wir II ergänzten, noch in je einem Punkte $B_1^{(\nu)}, B_1^{(\nu+1)}, \ldots B_1^{(\mu)}$; sie liegt daher auch noch in den Gruppen, die $PB_1^{(\nu)}, PB_1^{(\nu+1)}, \ldots PB_1^{(\mu-1)}$ entsprechen. Daher können keine zwei der Bestandtheile (§ 115) der Curve III übereinstimmen. Wenn man die Geraden q ablöst, die nicht nothwendig von einander verschieden sind, so bleibt ein Gebilde übrig, welches nur von einzelnen Geraden irgend eines Büschels in weniger als $s-\varrho$ Punkten getroffen

wird. Nach einem einfachen Schnittpunkt von I und II führt entweder ein einzelner Bestandtheil oder eine einzelne der ϱ Geraden.

Für den letzteren Bestandtheil können wir voraussetzen, dafs er II in

$$(s-\varrho)\nu+n(\mu-1)-(\mu-1)\nu$$

im Allgemeinen verschiedenen Punkten trifft, unter denen die vorher genannten auszuschliefsenden $(n+\mu-\nu)\nu-n$ sich befinden. Die ϱ Geraden aber treffen die Curve in $\nu\varrho$ Punkten, die nur dann nicht alle von einander verschieden sind, wenn die Geraden entweder theilweise zusammenfallen, oder irgend eine von ihnen II berührt. Man wählt statt Q einen Punkt T aufserhalb der Curve, statt P den beliebigen Punkt S einer der Geraden. In der SQ entsprechenden Gruppe t^{m+1} kommt TQ $(n-\nu)$-fach vor und nicht öfter, weil SQ in der Tangentengruppe in Q nicht enthalten ist. Fallen von den übrigen ν Punkten mehrere bei S_λ zusammen, so entspricht bei der Erzeugung von S_λ und T aus dem Strahle $S_\lambda Q$ eine Gruppe mit weniger als $n-2$ Strahlen aufserhalb TS_λ; entweder ist daher S_λ ein mehrfacher Punkt in II, oder die Tangente der Curve II in S_λ fällt mit $S_\lambda Q$ zusammen. Nun bedenke man, dafs die ergänzten Curven 1, 2, 3, wenn S_λ in I und II ein einfacher Punkt ist, auch durch das Strahlbüschel $t_1 t_2 t_3 \ldots$ und die Involutionen $(m+n+\mu-\nu-1)$ter Ordnung, $(\mu-1)$ten Ranges mit dem Centrum S_λ einer bestimmten Schaar erzeugt werden können. Da in den Involutionen zu 2) und 3) TS_λ eine Gruppe entspricht, in der $S_\lambda Q$ vorkommt, so mufs letzterer Strahl auch in der Involution zu 1) TS_λ entsprechen. Falls daher nicht I oder II S_λ zum mehrfachen Punkte hat, so müssen beide in S_λ dieselbe Tangente haben. Keinesfalls ist S_λ ein einfacher Schnittpunkt von I und II. Ebenso leicht zeigt man, dafs irgend σ der ϱ Geraden nur dann zusammenfallen, wenn alle Schnittpunkte derselben mit II nicht einfache Schnittpunkte von II und III sind. Auch in dem Falle, wo ϱ-Geraden sich ablösen, erhalten wir mithin im Allgemeinen und höchstens $m\nu+n\mu-\mu\nu$ einfache Schnittpunkte von I und II und neben $s(<m\nu+n\mu-\mu\nu)$ vorhandenen noch andere gemeinsame Punkte.

Der aufgestellte Satz ist folglich allgemein richtig, denn er gilt für $\mu=\nu=1$ (§ 139), und es kann von $(\mu-1,\nu)$ auf (μ,ν) geschlossen werden.

§ 142. Jede Curve $(n+1)$ter Ordnung ist das Erzeugnifs eines Strahlbüschels $p_1 p_1 p_3 \dots$ mit beliebigem Centrum P und einer projectivischen Strahleninvolution $q_1^{n+1} q_2^{n+1} q_3^{n+1} \dots$ $(n+1)$ter Ordnung und $(n+1)$-ten Ranges mit beliebigem Centrum Q, und umgekehrt ist ein Gebilde, für welches alle diese Erzeugungen gelten, eine Curve $(n+1)$ter Ordnung.

Zwei Curven $(n+1)$ter und $m$ter Ordnung haben stets gemeinsame Punkte, und zwar im Allgemeinen und höchstens $(n+1)m$ verschiedene. Die Anzahl derselben kann über $(n+1)m$ nur hinausschreiten, wenn beide Curven eine und dieselbe Curve νter Ordnung gemeinsam haben. Sie kann unter $(n+1)m$ nur herabsinken, wenn es Punkte unter den genannten giebt, wo entweder beide dieselbe Tangente haben, oder wenigstens eine keine bestimmte Tangente zeigt. Kann man bei jedem von $s (< (n+1)m)$ gemeinsamen Punkte nachweisen, dafs beide Curven bestimmte, aber von einander verschiedene Tangenten zeigen, so haben beide Curven noch andere Punkte gemeinsam.

Die Curve K $(n+1)$ter Ordnung sei das Erzeugnifs der projectivischen Büschel

$$K_1 K_2 K_3 K_4 \dots \;\overline{\wedge}\; K_1' K_2' K_3' K_4' \dots$$

von Curven $(m'+1)$ter und $(n-m')$ter Ordnung. Irgend eine K_λ ist das Erzeugnifs eines Strahlbüschels $s_1 s_2 s_3 s_4 \dots s_\varrho$ und einer projectivischen Involution $(m'+1)$ter Ordnung und $(m'+1)$ten Ranges (§ 131).

1) $$q_{\lambda 1}^{m'+1} q_{\lambda 2}^{m'+1} q_{\lambda 3}^{m'+1} q_{\lambda 4}^{m'+1} \dots q_{\lambda \varrho}^{m'+1}$$

Alle diese Involutionen bilden (§ 135) eine zum Büschel projectivische Schaar. Entsprechend ist K_λ' das Erzeugnifs von $s_1 s_2 s_3 s_4 \dots s_\varrho$ und einer zu den vorigen concentrischen und projectivischen Strahleninvolution

2) $$q_{\lambda 1}^{n-m'} q_{\lambda 2}^{n-m'} q_{\lambda 3}^{n-m'} q_{\lambda 4}^{n-m'} \dots q_{\lambda \varrho}^{n-m'}$$

$(n-m')$ter Ordnung und $(n-m')$ten Ranges. Für die Curve K wird dem Strahle s_ϱ die Coincidenzgruppe der entsprechenden Leitinvolutionen

3) $$q_{1\varrho}^{m'+1} q_{2\varrho}^{m'+1} q_{3\varrho}^{m'+1} q_{4\varrho}^{m'+1} \dots \;\overline{\wedge}\; q_{1\varrho}^{n-m'} q_{2\varrho}^{n-m'} q_{3\varrho}^{n+m'} q_{4\varrho}^{n-m'} \dots$$

zugeordnet. Daher ist (§ 118) K das Erzeugnifs des Strahlbüschels $s_1 s_2 s_3 \dots s_\varrho$ und einer projectivischen Involution $(n+1)$ter Ordnung und $(n+1)$ten Ranges

4) $$q_1^{n+1} q_2^{n+1} q_3^{n+1} \dots q_\varrho^{n+1} \;\overline{\wedge}\; s_1 s_2 s_3 \dots s_\varrho$$

Umgekehrt ist ein Gebilde, für welches diese Erzeugungsweise bei beliebigen P und Q aufserhalb seiner gilt, eine Curve K^{n+1}. Denn dasselbe ist (Vergl. Beweis zu § 140) das Erzeugnifs eines beliebigen Büschels $r_1 r_2 r_3 \ldots$ und einer Curvenreihe $R_1 R_2 R_3 \ldots$. Diese R_λ werden erzeugt durch irgend ein Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 \ldots$ und projectivische Involutionen $n$ter Ordnung, $n$ten Ranges einer zu $r_1 r_2 r_3 \ldots$ projectivischen Schaar; das Centrum S ist ebenfalls willkürlich. Wir haben es daher nach § 131 mit Curven $n$ter Ordnung und nach § 136 mit einem zu $r_1 r_2 r_3 \ldots$ projectivischen Büschel derselben zu thun. Daher ist das Gebilde eine Curve $(n+1)$ter Ordnung.

Wenn zwei Curven $(m+1)$ter und $n$ter Ordnung irgend einer Geraden in $m+n+1$ von einander verschiedenen Punkten begegnen, so erfüllen die beiden Involutionen, welche mit irgend einem Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 \ldots$ zusammen dieselben erzeugen, die Bedingungen des § 141. Beide Curven haben daher stets Punkte, und zwar im Allgemeinen und höchstens $n(m+1)$ verschiedene, gemeinsam. Neben $s(< n(m+1))$ einfachen Schnittpunkten sind noch andere Punkte ihnen gemeinsam.

Wenn keine Gerade die Curve K^{n+1} in $n+1$ verschiedenen Punkten trifft, so mufs die Involution $q_1^{n+1} q_2^{n+1} q_3^{n+1} \ldots$ in k Involutionen der Rangzahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots n_k$ zerfallen, wo

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots n_k = n + 1$$

ist, jedes n_λ aber so oft aufgenommen ist, als die zugehörige Theilinvolution in der Involution $(n+1)$ter Ordnung vorkommt; ein Bestandtheil wenigstens kommt doppelt vor (§ 114). Da S aufserhalb des Gebildes liegt, so sind die Ordnungszahlen den Rangzahlen mindestens gleich; sie sind ihnen gleich, weil die Summe der Ordnungszahlen $n+1$ ist. Jedes Theilgebilde wird daher durch das Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 \ldots$ und eine Involution $n_\lambda$ter Ordnung und $n_\lambda$ten Ranges erzeugt. Bei einer beliebigen Verlegung von S und Q aufserhalb der Curve können sich nun (vergl. § 140) die einzelnen Ordnungs- und Rangzahlen nicht verkleinern, die Ordnungs- und Rangzahl ihrer Gesammtheit bleibt aber ungeändert, woraus folgt, dafs K^{n+1} aus k Curven $n_1$ter, $n_2$ter, ... $n_k$ter Ordnung sich zusammensetzt. Ebenso mufs K^m in i Curven $m_1$ter, $m_2$ter, ... $m_i$ter Ordnung zerfallen, wenn sie jede Gerade in weniger als m verschiedenen Punkten trifft. Beide

Curven können indessen in dieser Weise zerfallen, auch wenn sie die Bedingungen des § 141 erfüllen.

Jedenfalls hat dann jeder Bestandtheil der einen mit jedem der anderen Curve gemeinsame Punkte, und es sind ihrer im Allgemeinen und höchstens

$$\sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{i} n_\lambda \,.\, m_\mu = \sum_{\lambda=1}^{k} n_\lambda \sum_{\mu=1}^{i} m_\mu = (n+1)m$$

vorhanden.

Wenn beide Curven unendlich viele Punkte gemeinsam haben, so müssen sie eine und dieselbe Theilcurve enthalten.

§ 143—147. Die verschiedenen Erzeugungsweisen der Curven $(n+1)$ter Ordnung[33].

§ 143. Eine Curve $(n+1)$ter Ordnung K^{n+1}, welche das Erzeugniſs der beiden projectivischen Büschel $UVWZ\ldots$ und $U'V'W'Z'\ldots$ von Curven $(m+1)$ter und $(n-m)$ter Ordnung ist, entsteht zugleich aus einem Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$, dessen Centrum ein beliebiger Grundpunkt eines der beiden Büschel ist, und aus einem projectivischen Büschel $S_1 S_2 S_3 S_4 \ldots$ von Curven $n$ter Ordnung.

Nach § 133 oder § 142 haben alle Curven $U_1, V_1, W_1, Z_1, \ldots$ wenigstens einen gemeinsamen Punkt S, und nach § 135 entstehen sie, wenn man auf das Büschel $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ mit diesem Centrum die unter einander projectivischen Büschel

1) $$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots \barwedge V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots \barwedge W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots \barwedge Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$$

von Curven $m$ter Ordnung einer Schaar bezieht. Das Büschel $UVWZ\ldots$ ist zu deren Leitbüscheln

2) $$U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots \barwedge U_2 V_2 W_2 Z_2 \ldots \barwedge U_3 V_3 W_3 Z_3 \ldots \barwedge U_4 V_4 W_4 Z_4 \ldots$$

projectivisch. In jedem Punkte der Curve $(n+1)$ter Ordnung schneidet sich ein Strahl s_λ mit irgend zwei zusammengehörigen Curven U_λ, U'; V_λ, V'; W_λ, W'; ... Man kann daher auf das eine Büschel $U'V'W'Z'\ldots$ die sämmtlichen Büschel 2) beziehen, auf jede entstehende Curve aber

den zugehörigen Strahl des Büschels $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ Jedes Büschel von 2) aber erzeugt mit $U' V' W' Z' \ldots$ eine Curve S_λ $n$ter Ordnung.

Die so entstehenden Curven bilden (§ 135) ein zu $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ projectivisches Büschel $S_1 S_2 S_3 S_4 \ldots$, das mit $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ die gegebene Curve erzeugt.

§ 144. Besitzt ein Büschel $UVWZ\ldots$ von Curven $(m+1)$ter Ordnung, welches mit einem projectivischen $U' V' W' Z' \ldots$ von Curven $(n-m)$-ter Ordnung eine Curve $(n+1)$ter Ordnung K erzeugt, vier getrennte Grundpunkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so kann man die Curve auch erzeugen mittels des um sie geschlungenen Kegelschnittbüschels und unendlich vieler projectivischer Büschel von Curven $(n-1)$-ter Ordnung.

Der Satz wird ganz analog wie der vorstehende bewiesen.

§ 145. Entsteht eine Curve $(n+1)$ter Ordnung aus den projectivischen Büscheln $UVWZ\ldots$ und $U' V' W' Z' \ldots$ von Curven $(m+1)$ter und $(n-m)$ter Ordnung, ist ferner K eine beliebige Curve $(n-2m-1)$-ter Ordnung $(m+1 \leqq n-m)$, ist endlich U'' eine beliebige Curve des Büschels UK, U', so kann man die gegebene Curve auch als Erzeugnifs der Curvenbüschel $UVWZ\ldots$ und $U'' V'' W'' Z'' \ldots$ auffassen. Von den Grundpunkten des Büschels $U' V' W' Z' \ldots$ kann man auf der Curve $(n+1)$ter Ordnung im Allgemeinen willkürlich einen mehr wählen, als zur Bestimmung einer Curve $(n-2m-1)$ter Ordnung hinreichen.

Nach § 132 können die Zusammenstellungen $KU, KV, KW, KZ, \ldots$ als Curven $(m-n)$ter Ordnung betrachtet werden; nach § 135 bilden sie ein zu $UVWZ\ldots$ projectivisches Büschel, denn sie werden von jeder Geraden l in einer speciellen Involution $(n-m)$ter Ordnung getroffen. In der durch die projectivischen Büschel

$$KU; KV; KW; KZ; \ldots \;\overline{\wedge}\; U'; V'; W'; Z'; \ldots$$

von Curven $(n-m)$ter Ordnung bestimmten Schaar (§ 138) giebt es auch ein Büschel $U'' V'' W'' Z'' \ldots$; da nun

$$KU, U', U''; KV, V', V''; KW, W', W''; KZ, Z', Z''; \ldots$$

je zu einem Büschel gehören, so durchschneiden $U', U''; V', V''; W', W''; Z', Z''; \ldots$ sich auf den Curven $U; V; W; Z; \ldots$ Daher ist die gegebene

Curve $(n+1)$ter Ordnung auch das Erzeugniſs der projectivischen Büschel $U, V, W, Z, \ldots$ und $U'', V'', W'', Z'', \ldots$ von Curven $(m+1)$ter und $(n-m)$-ter Ordnung. Sämmtliche Grundpunkte von U'', V'' müssen auf der untersuchten Curve $(n+1)$ter Ordnung liegen, und U'' trifft auſserhalb U die Curve nur in Grundpunkten. Da U'' dem Büschel U', KU beliebig entnommen werden darf, so können wir einen beliebigen Punkt S_1 unter die Grundpunkte des neuen Büschels aufnehmen. Zu ihnen gehören ferner alle die Grundpunkte des alten Büschels, welche der Curve K angehören; denn da sie in U vorkommen, befinden sie sich auch in der Curve U'' des Büschels U', KU.

Das soeben erläuterte Verfahren können wir nun mehrfach anwenden. Wir legen durch S_1 die Curve K_1 $(n-2m-1)$ter Ordnung, durch S_2 aber die Curve U''' des Büschels $K_1 U, U''$. U''' bestimmt auf der Curve $(n+1)$ter Ordnung eine Basis, in der S_1 und S_2 vorkommen. Jetzt legen wir durch S_1, S_2 eine Curve K_2 $(n-2m-1)$ter Ordnung und durch S_3 eine Curve $U^{(4)}$ des Büschels U''', UK_2, und haben dann ein Grundpunktsystem, in dem S_1, S_2 und S_3 vorkommen. In dieser Weise können wir λ beliebige Punkte $S_1, S_2, \ldots S_\lambda$ in die Basis des zweiten Büschels aufnehmen, wofern $S_1, S_2, \ldots S_{\lambda-1}$ sich in eine solche aufnehmen lassen, zugleich aber auf eine Curve $(n-2m-1)$ter Ordnung gereiht werden können, die S_λ nicht enthält. λ kann also um 1 gröſser sein als die gröſste Zahl der Punkte, durch die man eine Curve $(n-2m-1)$-ter Ordnung legen kann. Gewisse extreme Zusammenstellungen sind aber deswegen ausgeschlossen, weil die Curve U' nicht in U und eine Curve $(n-2m-1)$ter Ordnung zerfallen darf.

§ 146. Ist $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ ein Strahlbüschel mit einem beliebigen Curvenpunkt S als Centrum, so ist die Curve das Erzeugniſs von $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ und unendlich vielen projectivischen Büscheln aus Curven $n$ter Ordnung. Von den Grundpunkten eines solchen Büschels kann man im Allgemeinen willkürlich auf der Curve $(n+1)$ter Ordnung einen mehr wählen, als zur Bestimmung einer Curve $(n-1)$ter Ordnung hinreichen.

Da wir S in die Basis des Büschels U^{n-m}, V^{n-m} verlegen können, das mit U^{m+1}, V^{m+1} zusammen die Curve $(n+1)$ter Ordnung erzeugt, so erhalten wir nach § 143. zuerst ein Büschel von Curven $n$ter Ordnung,

welches mit $s_1 s_2 s_3 s_4 \dots$ zusammen die Curve $(n+1)$ter Ordnung erzeugt. Daraus aber ergeben sich nach § 145 unendlich viele andere.

§ 147. Sind A_1, A_2, A_3, A_4 vier beliebige Punkte einer Curve $(n+1)$ter Ordnung, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, so kann die Curve $(n+1)$ter Ordnung auf unendlich viele Weise mittels des um sie geschlossenen Kegelschnittbüschels und eines zu ihm projectivischen Büschels von Curven $(n-1)$ter Ordnung erzeugt werden $\{n+1 \geqq 3\}$.

Bei einer Curve dritter Ordnung legen wir durch die vier Punkte einen Kegelschnitt, der sie noch in 2. 3—4 oder 2 Punkten trifft. Ihre Verbindungslinie treffe die Curve noch in S. Nach § 146 kann die Curve durch das Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 s_4 \dots$ und ein Kegelschnittbüschel erzeugt werden, von dessen Grundpunkten man drei willkürlich, also auch mit A_1, A_2, A_3 zusammenfallend, wählen kann. Da nun s zwei Punkte auf der Curve bestimmt, die einem Kegelschnitt des Büschels angehören, so ist A_4 der vierte Grundpunkt des Büschels.

Ist $n+1$ gröſser als 3, so kann man A_1, A_2, A_3, A_4 unter die Grundpunkte des Büschels von Curven $n$ter Ordnung aufnehmen, das mit einem beliebigen Strahlbüschel (S) zusammen die Curve $(n+1)$ter Ordnung erzeugt. Dann ergiebt sich aus § 144 sofort eine Erzeugungsweise nach Art des Satzes, und daraus flieſsen nach § 145 unendlich viele andere ab.

§ 148. Zwei beliebige Curven U^{n+1} und V^{n+1} $(n+1)$ter Ordnung bestimmen ein Büschel, dessen Curven $W^{n+1}, Z^{n+1}, X^{n+1}, Y^{n+1}, \dots$ durch sämmtliche gemeinsame Punkte der ersteren beiden hindurchgehen. Irgend ein U^{n+1} und V^{n+1} nicht gemeinsamer Punkt bestimmt eine Curve des Büschels. Die Curven desselben bestimmen auf allen Geraden Involutionen $(n+1)$ter Ordnung, auf allen Kegelschnitten Involutionen $2(n+1)$-ter Ordnung. Alle diese Reihen sind zu einander und zu den Tangentenbüscheln in einfachen Grundpunkten projectivisch. Zu ihnen allen wird das Büschel von Curven $(n+1)$ter Ordnung projectivisch gesetzt.

Ist S ein Grundpunkt des Büschels, und sind $U_1^n U_2^n U_3^n U_4^n \dots$ und $V_1^n V_2^n V_3^n V_4^n \dots$ die Büschel von Curven $n$ter Ordnung, die mit $s_1 s_2 s_3 s_4 \dots$

zusammen U^{n+1} und V^{n+1} erzeugen, so entstehen die Glieder des Büschels aus dem Strahlbüschel und den Büscheln einer Schaar

$$U_1^n U_2^n U_3^n U_4^n \ldots, \quad V_1^n V_2^n V_3^n V_4^n \ldots, \quad W_1^n W_2^n W_3^n W_4^n \ldots, \quad Z_1^n Z_2^n Z_3^n Z_4^n \ldots,$$
$$X_1^n X_2^n X_3^n X_4^n \ldots, \quad Y_1^n Y_2^n Y_3^n Y_4^n \ldots, \ldots$$

Das Büschel von Curven $(n+1)$ter Ordnung ist zu den Leitbüscheln

$$U_1^n V_1^n W_1^n Z_1^n \ldots, \quad U_2^n V_2^n W_2^n Z_2^n \ldots, \quad U_3^n V_3^n W_3^n Z_3^n \ldots, \ldots$$

projectivisch.

Sind A_1, A_2, A_3, A_4 vier Grundpunkte des Büschels, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und erzeugen mit dem um sie geschlungenen Kegelschnittbüschel die projectivischen Büschel $U_1^{n-1} U_2^{n-1} U_3^{n-1} U_4^{n-1} \ldots$ und $V_1^{n-1} V_2^{n-1} V_3^{n-1} V_4^{n-1} \ldots$ von Curven $(n-1)$ter Ordnung die beiden gegebenen Curven, so erzeugen die übrigen Büschel der durch $U_1^{n-1} U_2^{n-1} U_3^{n-1} U_4^{n-1} \ldots$ und $V_1^{n-1} V_2^{n-1} V_3^{n-1} V_4^{n-1} \ldots$ bestimmten Schaar mit dem Kegelschnittbüschel die übrigen Curven des Büschels.

Überhaupt bilden die Curven $U^{n+1}, V^{n+1}, W^{n+1} \ldots$ ein Büschel, die durch ein festes Büschel $S_1^m S_2^m S_3^m S_4^m \ldots$ von Curven $m$ter Ordnung und durch die projectivischen Büschel

$$U_1^{n-m+1} U_2^{n-m+1} U_3^{n-m+1} \ldots; \quad V_1^{n-m+1} V_2^{n-m+1} V_3^{n-m+1} \ldots; \ldots$$

von Curven $(n-m+1)$ter Ordnung einer Schaar erzeugt werden[34].

Das Strahlbüschel (S) bestimmt auf allen Geraden projectivische Punktreihen, die Schaar der Büschel von Curven $n$ter Ordnung aber schneidet alle Geraden in projectivischen Schaaren projectivischer Involutionen

$$1) \quad u_1 u_2 u_3 u_4 \ldots \;\overline{\wedge}\; v_1 v_2 v_3 v_4 \ldots \;\overline{\wedge}\; w_1 w_2 w_3 w_4 \ldots \;\overline{\wedge}\; z_1 z_2 z_3 s_4 \ldots$$

Die Involutionen selbst sind zu $U_1^n U_2^n U_3^n U_4^n \ldots, V_1^n V_2^n V_3^n V_4^n \ldots, \ldots$ die Leitinvolutionen aber zu den Leitbüscheln $U_1^n V_1^n W_1^n Z_1^n \ldots, U_2^n V_2^n W_2^n Z_2^n \ldots, \ldots$ projectivisch. Nach § 74 hat die Punktreihe, in welcher $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ die Gerade trifft, mit den Involutionen 1) die Gruppen einer Involution $(n+1)$ter Ordnung gemeinsam. Sie ergiebt sich in projectivischer Anordnung zu den Leitinvolutionen $u_\lambda v_\lambda w_\lambda z_\lambda \ldots$ und also auch zu den Leitbüscheln $U_\lambda^n V_\lambda^n W_\lambda^n Z_\lambda^n \ldots$

Auf allen Kegelschnitten bestimmt $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ eine projectivische Involution 2ter Ordnung, $U_1^n U_2^n U_3^n U_4^n \ldots, V_1^n V_2^n V_3^n V_4^n \ldots, W_1^n W_2^n W_3^n W_4^n \ldots, \ldots$ aber bestimmen die Involutionen $2n$ter Ordnung (§ 135) einer

Schaar. Die zu ihnen projectivische Involution zweiter Ordnung hat mit ihnen die Gruppen einer Involution $(2n+2)$ter Ordnung gemeinsam, welche zu $U_\lambda^n V_\lambda^n W_\lambda^n Z_\lambda^n \ldots$ projectivisch ist.

Ein U^{n+1} und V^{n+1} gemeinsamer Punkt gehört einem Strahle s_λ und den beiden ihm zugehörigen Curven U_λ^n und V_λ^n gleichzeitig an. Da er dann allen Curven $U_\lambda^n, V_\lambda^n, W_\lambda^n, Z_\lambda^n, \ldots$ des durch erstere Curven bestimmten Leitbüschels angehört, so ist er allen Curven des untersuchten Büschels gemeinsam. Ein von den Grundpunkten verschiedener Punkt S gehört nur einer Curve des Büschels an. Denn eine ihn enthaltende Gerade s schneidet die Curven des Büschels in Gruppen einer Involution $(n+1)$ter Ordnung. Von derselben ist durch S eine Gruppe eindeutig bestimmt. Dieselbe durchläuft die einzige S enthaltende Curve des Büschels, wenn wir s um S drehen.

Da sonach es ganz gleichgültig ist, wie ursprünglich die zu $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ gehörenden Büschel $U_1^n U_2^n U_3^n U_4^n \ldots$, $V_1^n V_2^n V_3^n V_4^n \ldots$ gewählt wurden, so kann man einen Grundpunkt P den beiden Büscheln angehören lassen; es sei $U_\lambda^n V_\lambda^n W_\lambda^n Z_\lambda^n \ldots$ das SP entsprechende Leitbüschel. Wenn P ein einfacher Grundpunkt ist, so zeigt dasselbe in P das Tangentenbüschel von $U^{n+1} V^{n+1} W^{n+1} Z^{n+1} \ldots$ Dieses ist mithin zu allen Involutionen projectivisch, die zum Curvenbüschel perspectivisch sind.

Dafs überhaupt durch ein festes Büschel von Curven $m$ter Ordnung und eine Schaar projectivischer Büschel von Curven $(n+1-m)$-ter Ordnung ein Büschel von Curven $(n+1)$ter Ordnung erzeugt wird, folgt sofort aus § 74. Dasselbe fällt projectivisch zu den Leitbüscheln der Schaar aus.

§ 149. Zwei Curven $m$ter Ordnung und $(n-m+1)$ter Ordnung können zusammen als eine Curve $(n+1)$ter Ordnung behandelt werden.

U^m und U^{n-m+1} seien die gegebenen Curven, V^m und V^{n-m+1} aber irgend zwei andere Curven $m$ter und $(n-m+1)$ter Ordnung. Wir betrachten dann die Erzeugnisse U^{n+1} und V^{n+1} der beiden Paare projectivischer Büschel

$$U^m V^m W^m Z^m \ldots \;\overline{\wedge}\; V^{n-m+1} U^{n-m+1} W^{n-m+1} Z^{n-m+1} \ldots$$
$$U^m V^m W^m Z^m \ldots \;\overline{\wedge}\; V^{n-m+1} U^{n-m+1} W_1^{n-m+1} Z_1^{n-m+1} \ldots$$

Auf irgend einer Geraden bestimmen die beiden Curven Gruppen, welche

mit der von U^m und U^{n-m+1} ausgeschnittenen Gruppe aus $n+1$ Punkten zu einer Involution gehören. Ist nun S irgend ein U^m und V^m gemeinsamer Punkt, so können U^{n+1} und V^{n+1} mit Hülfe des Strahlbüschels $s_1 s_2 s_3 \dots$ und zweier projectivischer Büschel von Curven $n$ter Ordnung erzeugt werden. Diese Büschel constituiren eine Schaar, von der ein bestimmtes Büschel mit $s_1 s_2 s_3 \dots$ die besondere Curve W^{n+1} des Büschels U^{n+1}, V^{n+1} erzeugt, welche durch irgend einen Punkt P von U^m bestimmt wird. Jede Gerade trifft aber $U^{n+1}, V^{n+1}, W^{n+1}, \dots$ in drei Gruppen derselben Involution; daher zerfällt W^{n+1} in die beiden gegebenen Curven U^m und U^{n+1-m}.

§ 150. Ein Büschel von Curven $(n+1)$ter Ordnung wird durch irgend ein Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 p_4 \dots$ und die zu ihm projectivischen Involutionen $q_{\lambda_1}^{n+1} q_{\lambda_2}^{n+1} q_{\lambda_3}^{n+1} q_{\lambda_4}^{n+1} \dots$ $(n+1)$ter Ordnung und $(n+1)$ten Ranges einer zum Büschel projectivischen Schaar erzeugt.

Nach § 142 haben wir es mit projectivischen Involutionen $q_{\lambda_1}^{n+1} q_{\lambda_2}^{n+1} q_{\lambda_3}^{n+1} q_{\lambda_4}^{n+1} \dots$ $(n+1)$ter Ordnung und $(n+1)$ten Ranges zu thun. Nun hat aber das Büschel mit jedem P und Q enthaltenden Kegelschnitt die Gruppen einer Involution $(2n+2)$ter Ordnung gemeinsam. Da folglich mit jedem Strahlbüschel $q_1 q_2 q_3 q_4 \dots$, welches zu ihnen allen projectivisch ist, die Involutionen $(n+1)$ten Ranges die Gruppen einer Involution $2(n+1)$ter Ordnung gemeinsam haben, so bilden sie nach § 110 eine Schaar. Da ihre Leitinvolutionen diejenigen Punktinvolutionen projiciren, welche das Büschel auf $p_1, p_2, p_3, \dots$ fixirt, so ist die Schaar zum Büschel projectivisch.

§ 151. Durch irgend drei Curven $(n+1)$ter Ordnung K_1, K_2, K_3 ist ein Netz bestimmt, dem erstens die Curven $K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, \dots$ des Büschels K_2, K_3 angehören, und ferner die Büschel, welche dieselben mit K_1 verbinden. Das durch irgend zwei Curven des Netzes bestimmte Büschel gehört demselben ganz an; irgend zwei Büschel des Netzes haben eine Curve gemeinsam.

Der Nachweis wird ganz analog geführt, wie der entsprechende bei Kegelschnitten sich ergab. Irgend ein Büschel K_l', K_m' hat mit K_l, K_m eine Curve K gemeinsam. Sie bildet zusammen mit K_1 das Erzeug-

nifs der Curvenbüschel $K_1 K_l K_l' \dots$ und $K_1 K_m K_n' \dots$ Dafs dieser zweite Theil des Erzeugnisses eben eine Curve ist, die K_l, K_m und K_l', K_m' zugleich angehört, folgt aus § 71. Hieraus kann dann aber, wie es bei Kegelschnitten geschieht, leicht abgeleitet werden, dafs irgend zwei Büschel eine Curve des Netzes gemeinsam haben, und dafs irgend zwei Curven ein ganz im Netze enthaltendes Büschel bestimmen.

Anmerkung. Die Definition, welche uns (§ 81) auf die allgemeinen Involutionsnetze führte, kann ganz ebenso zur Herstellung von Curvennetzen höherer Stufe benutzt werden; von ihnen gelten dieselben Lehrsätze, die wir bei den Involutionsnetzen als richtig erkannten.

§ 152. Zwei zu einander projectivische Büschel $U_1 U_2 U_3 U_4 \dots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \dots$ und ein drittes zwei entsprechende Curven verbindendes Büschel $U_1 V_1 W_1 Z_1 \dots$ von Curven $(n+1)$ter Ordnung bestimmen eine zu diesem perspectivische Schaar zu jenen projectivischer Büschel

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \dots \;\overline{\wedge}\; V_1 V_2 V_3 V_4 \dots \;\overline{\wedge}\; W_1 W_2 W_3 W_4 \dots \;\overline{\wedge}\; Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \dots$$

Homologe Curven liegen in Leitbüscheln

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \dots \;\overline{\wedge}\; U_2 V_2 W_2 Z_2 \dots \;\overline{\wedge}\; U_3 V_3 W_3 Z_3 \dots \;\overline{\wedge}\; U_4 V_4 W_4 Z_4 \dots$$

angeordnet, die zu einander projectivisch sind. Irgend eine Gerade wird von den Curven in einer Schaar projectivischer Involutionen $(n+1)$ter Ordnung, ein Kegelschnitt aber in einer Schaar projectivischer Involutionen $(2n+2)$ter Ordnung getroffen.

Die Überlegung, mit deren Hülfe wir den entsprechenden Lehrsatz über Kegelschnitte bewiesen haben, ist hinreichend allgemein gehalten, um zugleich auch für diesen allgemeineren Fall zu genügen, um darzuthun, dafs durch zwei gegebene projectivische Büschel ein Gebilde unserer Art bestimmt wird.

Dafs die beiden gegebenen Büschel $(n+1)$ter Ordnung nur eine Schaar bestimmen können, zeigt man entweder ebenfalls mit Hülfe der Methode, die wir im § 128 angewendet hatten, oder man benutzt, dafs jede Gerade sowohl jedem Leitbüschel, als auch jedem Büschel der Schaar selbst in je einer Involution $(n+1)$ter Ordnung begegnen mufs. Da die letzteren Involutionen somit zu einer Involutionsschaar gehören, diese aber durch zwei Involutionen eindeutig bestimmt ist, so sind auch durch

zwei Büschel alle übrigen der Schaar angehörigen Büschel eindeutig bestimmt.

Nunmehr sind alle im vorigen Abschnitt angegebenen Resultate von n auf $n+1$ übertragen und zwar finden sich die §§ 129—138 in dieser Art bewiesen in den folgenden §§: 143, 146, 147, 142, 149, 142, 141, 148, 150, 151 und 152.

Von hier aus ist die Möglichkeit des Fortschreitens z. B. in nachstehender Art gegeben. Curvennetze können collinear auf andere gleicher Stufe, aber auch auf Involutionsnetze μter Stufe bezogen werden. Den Involutionen μten Ranges, welche in dem letzteren sich vorfinden, entsprechen in dem Curvennetz Reihen, die sich projectivisch auf einförmige Gebilde beziehen lassen, sich zu Schaaren zusammenschliessen lassen, u. s. w. Das auszeichnende Merkmal einer solchen Curvenreihe ist, dafs durch irgend einen Punkt der Ebene μ verschiedene Curven hindurchgehen, weshalb sie auch als ein Curvenbüschel vom μten Range bezeichnet werden kann. Von grofser Wichtigkeit werden diese Gebilde besonders für die Flächentheorie; eine Fläche $n$ter Ordnung wird nämlich von irgend einem Ebenenbüschel in Curven $n$ter Ordnung getroffen, die von jedem beliebigen Punkte Q aus durch ein projectivisches Büschel $n$ten Ranges aus Kegeln $n$ter Ordnung projicirt werden. Indessen würde die nähere Discussion dieser Gebilde über den Rahmen dieser Arbeit hinausführen.

Vierter Abschnitt.

Aufstellung einer zweiten Reihe von Lehrsätzen über Curven $n$ter Ordnung. *§§ 153—160.*

§ 153. Wenn von den pn von einander verschiedenen gemeinschaftlichen Punkten zweier Curven $p$ter und $n$ter Ordnung ns auf einer Curve $s$ter Ordnung gelegen sind, so ist durch die übrigen $(p-s)n$ Schnittpunkte eine Curve $(p-s)$ter Ordnung möglich. Hierbei nehme man p und s beliebig grofs, p aber gröfser als s.

Wenn von den p^2 verschiedenen Schnittpunkten zweier Curven $p$ter Ordnung pn auf einer Curve $n$ter Ordnung liegen, so befinden sich die $(p-n)p$ übrigen auf einer Curve $(p-n)$ter Ordnung.

§ 154. Durch $\frac{n(n+3)}{2}$ beliebige Punkte einer Ebene kann man stets eine, durch $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ willkürliche von ihnen stets unendlich viele Curven $n$ter Ordnung legen; schneiden sich irgend zwei unter den letzteren Curven in noch $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ von einander verschiedenen Punkten, welche nicht auf derselben Curve $(n-2)$ter Ordnung gelegen sind, so müssen alle Curven, die durch die $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ ersteren Punkte hindurchgehen, auch die letzteren nothwendigen Punkte enthalten. Alle diese Curven bilden ein Büschel, und ein letzter hinzugefügter Punkt bestimmt eine Curve desselben, wenn er von den nothwendigen verschieden ist.

Auf jeder nicht zerfallenden Curve $n$ter Ordnung kann man $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte finden, durch welche nur sie allein sich legen läfst.

§ 155. Befinden sich unter den pn verschiedenen Punkten $(p > n)$, welche den vollständigen Durchschnitt zweier Curven K^p und K^n der Ordnungen p und n bilden, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ nicht auf einer Curve $(n-2)$ter Ordnung gelegene, so müssen alle Curven $p$ter Ordnung, welche die $np - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ übrigen Punkte enthalten, auch durch jene letzteren nothwendigen Punkte gehen[35].

§ 156. Sind $\frac{(m+n-p-1)(m+n-p-2)}{2}$ von den $m.n$ Schnittpunkten einer K^m mit einer K^n nicht auf einer $K^{m+n-p-3}$ gelegen, und ist $m+n-3 > p > m > n$, so gehen alle Curven $p$ter Ordnung, welche die $mn - \frac{(m+n-p-1)(m+n-p-2)}{2}$ übrigen Punkte enthalten, auch durch die ausgesonderten Punkte hindurch[36].

Auf diese Sätze werden wir uns in dem nächsten Abschnitte stützen. Wir fügen hier jedoch auch die Sätze bei, welche wir über die Polaren entwickeln werden, ohne von n auf $n+1$ zu schliefsen.

§ 157. Die Tangenten, welche von einem Punkt P aus an eine Curve K^n $n$ter Ordnung sich legen lassen, haben ihre Berührungspunkte

auf einer Curve P^{n-1} der Ordnung $n-1$. Dieselbe kann definirt werden als Ort der Doppelpunkte aller der Involutionen, die auf von P ausgehenden Strahlen p durch ihre Schnittgruppe mit der K^n und den $n$fach zählenden Punkt P bestimmt werden. Zu dieser ersten Polare P^n findet man eine zweite, dritte, endlich eine $(n-1)$te. In der Reihe P^{n-1} $P^{n-2} P^{n-3} \dots P^1$ steht alsdann jede folgende Curve zur vorhergehenden in demselben Verhältnifs, wie P^{n-1} zu K^n; die vorletzte Polare ist ein Kegelschnitt, die letzte aber eine Gerade.

§ 158. Nimmt man bezüglich irgend eines Punktes P die erste Polare P^{n-1} und bezüglich irgend eines Punktes Q derselben die Polargerade Q^1, so geht die letztere durch den Punkt P.

§ 159. Die μten Polaren, welche den Punkten einer Punktreihe hinsichtlich einer festen K^n entsprechen, bilden ein zu ihr projectivisches Büschel, den Punkten der Ebene entsprechen die Curven eines zu ihr collinearen Netzes.

§ 160. Die μten Polaren eines festen Punktes, bezüglich der Curven eines Netzes genommen, bilden ein zu diesem collineares Netz, diejenigen eines Büschels also ein projectivisches Büschel[37].

Fünfter Abschnitt.

Erweisung der vorstehenden Lehrsätze für Curven $(n+1)$ter Ordnung. §§ 161—172.

§ 161. Läfst man eine Gerade p sich um einen beliebigen Punkt P drehen, und sucht man in jeder Lage die Doppelpunkte der Involution auf, welche in P einen $(n+1)$fachen Punkt hat, und von der eine zweite Gruppe stets p mit K^{n+1} gemeinsam ist, so erhält man eine Curve P^n $n$ter Ordnung, welche als Polare von P hinsichtlich K^{n+1} bezeichnet wird und die Berührungspunkte aller Tangenten enthält, die sich von P aus an die Curve legen lassen.

Wir nehmen an, dafs die Curve nicht in Theile zerfällt, von denen einzelne übereinstimmen. P sei das Centrum, und eine Gerade q,

die K^{n+1} in $n+1$ verschiedenen Punkten trifft, die Axe zweier perspectivisch-collinearer Systeme. Dabei entsteht aus der ersten eine zweite Curve $\mathfrak{K}^{n+1}$ $(n+1)$ter Ordnung, die aufser den $n+1$ auf q gelegenen Punkten noch $n(n+1)$ andere mit der ersteren gemein hat. Sie müssen auf einer Curve $n$ter Ordnung liegen. Ist nämlich Q irgend einer der auf q gelegenen Punkte, und Q^n irgend eine durch die anderen n gehende Curve $n$ter Ordnung, so kann K^{n+1} als Erzeugnifs der Curvenbüschel $Q^n Q_1^n Q_2^n Q_3^n \ldots$ und $q q_1 q_2 q_3 \ldots$ dargestellt werden, $\mathfrak{K}^{n+1}$ aber als dasjenige zweier Büschel $Q^n \mathfrak{Q}_1^n \mathfrak{Q}_2^n \mathfrak{Q}_3^n \ldots$ und $q q_1 q_2 q_3 \ldots$ Jedenfalls kann jede Curve (§ 146) mit Hülfe von $q q_1 q_2 q_3 \ldots$ und eines projectivischen Büschels $K^n K_1^n K_2^n K_3^n \ldots$ von Curven $n$ter Ordnung hergestellt werden. q wird dabei eine Curve K^n zugeordnet, die sich mit Q^n auf q schneidet. In dem Büschel, das beide constituiren, kommt q (§ 153) zusammen mit einer Curve K^{n-1} $(n-1)$ter Ordnung vor; also ist nach § 145 die angenommene Entstehungsweise gesichert. Die beiden Büschel $Q^n \mathfrak{Q}_1^n \mathfrak{Q}_2^n \mathfrak{Q}_3^n \ldots$ und $Q^n Q_1^n Q_2^n Q_3^n \ldots$ erzeugen aber aufser Q^n noch eine Curve $\mathfrak{P}^n$ $n$ter Ordnung, welche mit q zusammen eine Curve des durch K^{n+1} und $\mathfrak{K}^{n+1}$ bestimmten Büschels bildet. Da q und $\mathfrak{P}^n$ zusammen eine Gruppe der Involution ausschneiden, welche auf p durch K^{n+1} und $\mathfrak{K}^{n+1}$ bestimmt wird, diese beiden Gruppen aber einander in zwei Punktreihen entsprechen, von denen P und (pq) die Doppelpunkte sind, so nähern sich an der Grenze die Schnittpunkte von $\mathfrak{P}^n$ den Doppelpunkten der Involution, von der P ein $(n+1)$facher Punkt und (pK^{n+1}) eine Gruppe ist (§ 53). Dem zweifellos eindeutig bestimmten Orte P^n dieser Doppelpunktsgruppen kann man also eine Curve $n$ter Ordnung $\mathfrak{P}^n$ so weit nähern, als man nur immer will. Daher ist P^n selbst eine Curve $n$ter Ordnung. Wenn nun in der Schnittgruppe zwischen p und K^{n+1} ein mehrfacher Punkt vorkommt, so gehört er nach der Bedeutung von P^n auch dieser Curve an. Entweder giebt es alsdann in den genannten Punkten überhaupt keine bestimmte Tangente, oder dieselbe führt nach P. Die Anzahl der Tangenten, die von P aus an die Curve K^{n+1} gehen, ist also im Allgemeinen und höchstens $n(n+1)$.

homology.

An der Grenze = When fields in homology approach one another 54

Bach

§ 162. Nimmt man hinsichtlich eines Punktes P die Polaren P_1^n, $P_2^n, P_3^n, P_4^n, \ldots$ in Bezug auf die Curven $K_1^{n+1}, K_2^{n+1}, K_3^{n+1}, K_4^{n+1}, \ldots$

eines Büschels von Curven $(n+1)$ter Ordnung, so erhält man ein zu dem gegebenen projectivisches Büschel. Dasselbe gilt dann von den zweiten, dritten, vierten, endlich $n$ten Polaren. Die letzteren bilden ein zum Curvenbüschel projectivisches Strahlbüschel.

Bei der betrachteten Collineation entspricht dem Curvenbüschel $K_1^{n+1} K_2^{n+1} K_3^{n+1} \ldots$ ein projectivisches $\mathfrak{K}_1^{n+1} \mathfrak{K}_2^{n+1} \mathfrak{K}_3^{n+1} \ldots$ Dem Erzeugnifs derselben gehört q vollständig an. Wir können dasselbe aber auch herstellen mit Hülfe eines der Büschel und irgend eines anderen, welches zu ihrer Schaar gehört. Ein beliebiger Punkt des Erzeugnisses, also auch von q, kann unter die Grundpunkte eines solchen Büschels aufgenommen werden (§ 145). Ein solcher Punkt bestimmt aber in den Leitbüscheln $\mathfrak{K}_1^{n+1}, K_1^{n+1}; \mathfrak{K}_2^{n+1}, K_2^{n+1}; \mathfrak{K}_3^{n+1}, K_3^{n+1}; \ldots$ die Curven $q\mathfrak{P}_1^n; q\mathfrak{P}_2^n; q\mathfrak{P}_3^n; \ldots$ Daher bilden die Curven $\mathfrak{P}_1^n, \mathfrak{P}_2^n, \mathfrak{P}_3^n, \ldots$ eine Gesammtheit, die von jeder Geraden in einer zu $K_1^{n+1} K_2^{n+1} K_3^{n+1} \ldots$ projectischen Involution $n$ter Ordnung geschnitten wird. Sie bilden mithin (§ 148) ein zu $K_1^{n+1} K_2^{n+1} K_3^{n+1} \ldots$ projectivisches Büschel, und dasselbe ist mit den $P_1^n, P_2^n, P_3^n, \ldots$ der Fall, denen sie sich, immer im Büschel liegend, an der Grenze nähern.

§ 163. Wenn in einem Büschel von Curven K^{n+1} ein Glied aus $n+1$ von P ausgehenden Strahlen besteht, so haben alle Curven desselben eine und dieselbe Polare P^n hinsichtlich P.

Denn bei der Collineation entspricht jede Gerade p, also auch die aus $n+1$ solchen Geraden bestehende Curve, sich selbst. Daher erzeugen die Büschel

$$K_1^{n+1} K_2^{n+1} K_3^{n+1} K_4^{n+1} \ldots \;\overline{\wedge}\; \mathfrak{K}_1^{n+1} \mathfrak{K}_2^{n+1} \mathfrak{K}_3^{n+1} \mathfrak{K}_4^{n+1} \ldots$$

in diesem Falle eine Curve $(n+1)$ter Ordnung (§ 151), welche die Gerade q als Theil enthält und den Büscheln $K_1^{n+1}, \mathfrak{K}_1^{n+1}; K_2^{n+1}, \mathfrak{K}_2^{n+1}; K_3^{n+1}, \mathfrak{K}_3^{n+1}; \ldots$ gleichzeitig angehört. Ihr zweiter Bestandtheil $\mathfrak{P}^n$ geht an der Grenze in die erste Polare aller Curven $K_1^{n+1}, K_2^{n+1}, K_3^{n+1}, \ldots$ über.

§ 164. Wenn der Punkt Q auf der ersten Polare P^n eines beliebigen Punktes P hinsichtlich K^{n+1} sich befindet, so geht seine Polargerade hinsichtlich derselben Curve durch P.

Man lege durch P $n+1$ verschiedene Geraden $p_1, p_2, \ldots p_{n+1}$; auf einer beliebigen durch Q gehenden Geraden q sollen dieselben mit K^{n+1}

eine Involution $(n+1)$ter Ordnung bestimmen, in der Q zu einer regulären Gruppe gehört, was offenbar angängig ist, sobald Q aufserhalb der betrachteten Curve liegt. In Bezug auf alle Curven des Büschels, zu dem K^{n+1} und die $n+1$ Geraden gehören, hat P dieselbe erste Polare, auf der auch Q liegt. Die durch Q gehende Curve des Büschels hat Q zum einfachen Punkte und daher hier die Tangente QP. Hinsichtlich der $n+1$ Strahlen ist die erste Polare nichts anderes als die Gruppe der n Doppelstrahlen der Involution aus dem $(n+1)$fachen Strahle PQ und der gegebenen Gruppe $p_1 p_2 \dots p_{n+1}$. Die zweite Polare besteht aus $n-1$ P enthaltenden Geraden, endlich die $n$te aus einer von P ausgehenden Geraden. Alle Polargeraden bilden aber ein Strahlbüschel. Das Centrum desselben mufs Q sein, weil diesen Punkt zwei verschiedene und damit alle Polargeraden enthalten.

§ 165. Nimmt man hinsichtlich der Punkte $P, Q, R, S, \dots$ einer Geraden l die ersten Polaren in Bezug auf eine feste Curve K^{n+1}, so erhält man ein zu der gegebenen Punktreihe projectivisches Büschel $P^n Q^n R^n S^n \dots$

Nur die Punkte, in denen P^n und Q^n sich schneiden, ergeben die Polargerade l. Damit nämlich die Polargerade eines Punktes durch P geht, mufs er P^n, damit sie durch Q geht, Q^n angehören. l gehört als Polargerade den Schnittpunkten von P^n und Q^n, aber ebenso denjenigen von P^n und R^n, von P^n und $S^n, \dots$ zu. Folglich haben $P^n, Q^n, R^n, S^n, \dots$ alle dieselben Punkte mit einander gemein und müssen zu demselben Büschel gehören, wenn P^n und Q^n in n^2 verschiedenen Punkten sich treffen. Das dann entstehende Büschel ist projectivisch zu der Punktreihe $PQRS\dots$ P^n z. B. schneidet die Gerade l in der Doppelpunktsgruppe der Involution, welche die feste Gruppe AA_1A_2 enthält, in der K^{n+1} und l sich treffen, überdies aber bei P einen $(n+1)$fachen Punkt besitzt. P haben wir in $Q, R, S, \dots$ übergehen zu lassen. Die fragliche Gruppe gehört der Involution $AA_1; A_2\mathfrak{D}$ an (§ 53), wo $\mathfrak{D}$ die für AA_1 analog gebildete Gruppe ist. Setzen wir nun voraus, dafs $\mathfrak{D}$ eine Involution $(n-1)$ter Ordnung projectivisch zu $PQRS\dots$ durchläuft, so beschreibt $A_2\mathfrak{D}$ eine Involution $n$ter Ordnung, und das Büschel $AA_1; A_2\mathfrak{D}$ markirt auf jeder Involution ihres Netzes eine zu ihm und auch zu $PQRS\dots$ pro-

54

jectivische Reihe. Dies ist also auf der Involution der Fall, welche die Curven des Büschels P^n, Q^n auf l bestimmen, und auf deren Untersuchung es ankommt. Da auch für den Werth 2 von $n+1$ der Satz richtig ist, so ist durch einen Schlufs von n auf $n+1$ dargethan, dafs das Büschel $P^n Q^n R^n S^n \ldots$ projectivisch zu $PQRS\ldots$ ist. Dabei ist aber immer vorausgesetzt, dafs $P^n, Q^n, R^n, S^n, \ldots$ in n^2 verschiedenen Punkten sich treffen.

Wir legen nunmehr durch P und Q zwei Gruppen zu je $n+1$ Strahlen, so beschaffen, dafs die Polaren von P resp. Q bezüglich je der anderen Gruppen aus n von einander verschiedenen Strahlen bestehen. K_1^{n+1} sei irgend eine Curve $(n+1)$ter Ordnung des durch die beiden Gruppen zu $n+1$ Strahlen bestimmten Büschels. Hinsichtlich irgend eines Punktes R von PQ ergeben nach § 162 die drei Curven erste Polaren, welche einem Büschel angehören. Jedoch für die beiden Gruppen von je $n+1$ Strahlen ergiebt sich für alle Punkte $R, S, T, \ldots$ je dieselbe Gruppe von n Strahlen als Polare, und die n^2 verschiedenen Punkte, in denen sie sich treffen, gehören also den Polaren $P_1^n, Q_1^n, R_1^n, S_1^n, \ldots$ an, welche hinsichtlich $P, Q, R, S, \ldots$ in Bezug auf K_1^{n+1} genommen sind. Die ersteren bilden mithin ein zu der letzteren Punktreihe projectivisches Büschel. Man nehme für jede Curve des Büschels $K^{n+1} K_1^{n+1} K_2^{n+1} K_3^{n+1} \ldots$ hinsichtlich $P, Q, R, S, \ldots$ die ersten Polaren

$$1)\quad P^n, Q^n, R^n, S^n, \ldots;\ P_1^n, Q_1^n, R_1^n, S_1^n, \ldots;\ P_2^n, Q_2^n, R_2^n, S_2^n, \ldots;\ P_3^n, Q_3^n, R_3^n, S_3^n, \ldots.$$

Jedenfalls kann vorausgesetzt werden, dafs P_2^n, Q_2^n und P_3^n, Q_3^n sich in je n^2 verschiedenen Punkten treffen. Nöthigenfalls kann dies erreicht werden, indem man K_2^{n+1} und K_3^{n+1} an K_1^{n+1} heranrückt. Dabei rücken P_2^n, P_3^n an P_1^n und Q_2^n, Q_3^n an Q_1^n heran, indem

$$2)\qquad P^n P_1^n P_2^n P_3^n \ldots \barwedge Q^n Q_1^n Q_2^n Q_3^n \ldots \barwedge R^n R_1^n R_2^n R_3^n \ldots \barwedge S^n S_1^n S_2^n S_3^n \ldots$$

projectivische Büschel sind, welche aus den Polaren von $P, Q, R, S, \ldots$ hinsichtlich der Curven $K^{n+1}, K_1^{n+1}, K_2^{n+1}, K_3^{n+1}, \ldots$ bestehen. P_2^n, Q_2^n, sowie P_3^n, Q_3^n müssen sich daher gleich P_1^n, Q_1^n in je n^2 verschiedenen Punkten schneiden. Dann liegen die drei letzten Gebilde von 1) in projectivischen Büscheln angeordnet, wie oben gezeigt worden ist. Dieselben sind wegen der Beziehungen 2) Glieder einer Schaar. In einem

Büschel liegen wegen derselben Beziehungen auch die Curven P^n, Q^n, $R^n, S^n, \ldots$ Diese bilden also, wie der Satz behauptet, ein zu $PQRS\ldots$ projectivisches Büschel $P^n Q^n R^n S^n \ldots$ auch dann, wenn sie in weniger als n^2 verschiedenen Punkten sich treffen sollten.

§ 166. Jedes Büschel K_1^m, K_2^m von Curven $m$ter Ordnung sendet nur eine endliche Anzahl von Curven aus, die einer vorliegenden Curve $(n+1)$ter Ordnung K^{n+1} in weniger als $m(n+1)$ verschiedenen Punkten begegnen, falls irgend eine Curve K_ϱ^m des Büschels $m(n+1)$ verschiedene Punkte mit K^{n+1} gemeinsam hat.

Zwei Curven $m$ter und $(n+1)$ter Ordnung können sich in weniger als $m(n+1)$ Punkten nur treffen, wenn (§ 142) wenigstens in einem derselben beide Curven dieselbe Tangente zeigen, oder für eine von ihnen die Tangente unbestimmt wird. Zeigt wenigstens eine Curve eine bestimmte Tangente t_1, und hat die andere entweder dieselbe oder keine bestimmte Tangente, so müssen für jeden Punkt derselben die beiden Polaren in dem bezüglichen mehrfachen Schnittpunkt sich treffen. Zeigt keine der Curven eine bestimmte Tangente, so geht jede Polare der einen oder der anderen Curve durch denselben. Wir lassen einen Punkt die Gerade l durchlaufen und nehmen für die Lagen $P, Q, R, \ldots$ die Polaren

$$P^n, Q^n, R^n, \ldots;\ P_1^{m-1}, Q_1^{m-1}, R_1^{m-1}, \ldots;\ P_2^{m-1}, Q_2^{m-1}, R_2^{m-1}, \ldots;\ P_3^{m-1}, Q_3^{m-1}, R_3^{m-1}, \ldots; \ldots$$

der Curven $K^{n+1}; K_1^m; K_2^m; K_3^m; \ldots$ In einem der untersuchten Punkte treffen sich K^{n+1} und eine K_λ^m mit irgend zwei zusammengehörigen Curven

$$P^n, P_\lambda^{m-1};\ Q^n, Q_\lambda^{m-1};\ R^n, R_\lambda^{m-1};\ S^n, S_\lambda^{m-1}; \ldots$$

Nun erzeugt aber $K_1^m K_2^m K_3^m K_4^m \ldots$ mit den projectivischen Büscheln

$$P_1^{m-1} P_2^{m-1} P_3^{m-1} P_4^{m-1} \ldots \;\overline{\wedge}\; Q_1^{m-1} Q_2^{m-1} Q_3^{m-1} Q_4^{m-1} \ldots \;\overline{\wedge}\; R_1^{m-1} R_2^{m-1} R_3^{m-1} R_4^{m-1} \ldots \;\overline{\wedge}\; \ldots,$$

welche zu einer Schaar gehören (§ 165), die Curven $P^{2m-1}, Q^{2m-1}, R^{2m-1}, \ldots$ eines Büschels, welches zu $P_\lambda^{m-1} Q_\lambda^{m-1} R_\lambda^{m-1} \ldots$ und folglich auch zu $P^n Q^n R^n \ldots$ projectivisch ist. Letzteres erzeugt mit $P^{2m-1} Q^{2m-1} R^{2m-1} \ldots$ eine Curve $(n+2m-1)$ter Ordnung, welche alle Punkte der verlangten Art

mit K^{n+1} gemeinsam hat. Dieselbe trifft die Curve K^{n+1} aber höchstens in $(n+1)(n+2m-1)$ Punkten, unter denen die Grundpunkte des Büschels K_1^m, K_2^m sich finden, die auf K^{n+1} liegen.

Die Curve kann nun mit K^{n+1} nur dann mehr als $(n+1)(n+2m-1)$ Punkte gemeinsam haben, wenn beiden dieselbe Theilcurve angehört. Diese aber müfste K_ϱ^m in einzelnen ihrer Schnittpunkte mit K^{n+1} treffen, unter denen sich jedoch kein Punkt der gesuchten Art finden kann.

§ 167. Wenn $(n+1)p$ der p^2 verschiedenen Schnittpunkte zweier Curven $p$ter Ordnung $(p > n+1)$ auf einer Curve K^{n+1} $(n+1)$ter Ordnung liegen, so befinden sich die $(p-n-1)p$ übrigen auf einer Curve $(p-n-1)$ter Ordnung.

Die p^2 Schnittpunkte sind die Grundpunkte eines Büschels, von dessen Curven wir eine, K^p, durch einen $((n+1)p+1)$ten Punkte der K^{n+1} legen können. Sie trifft die letztere in unendlich vielen Punkten (§ 142) und hat daher zuerst einen Bestandtheil $r$ter Ordnung mit ihr gemeinsam. Er trifft in höchstens rp Punkten die beiden gegebenen Curven $p$ter Ordnung. Daher begegnen sich die beiden Curven K^{p-r} und K^{n+1-r}, durch welche die Curve zu K^p und K^{n+1} zu ergänzen ist, in $p(n-r+1)$ Punkten. Auch sie haben daher noch einen Bestandtheil gemeinsam, und man überzeugt sich so, dafs eine Curve $p$ter Ordnung des Büschels die Curve $(n+1)$ter Ordnung vollständig enthält. Ihr zweiter Theil ist eine Curve $(p-n-1)$ter Ordnung.

§ 168. Wenn $m(n+1)$ von den $p(n+1)$ verschiedenen Schnittpunkten zweier Curven K^p und K^{n+1} $p$ter und $(n+1)$ter Ordnung $(p > n+1)$ auf einer Curve $m$ter Ordnung liegen, so liegen die übrigen $(p-m)(n+1)$ auf einer Curve K^{p-m} $(p-m)$ter Ordnung.

Für $n+1=3$, also $n=2$, folgt der Lehrsatz am einfachsten aus dem Satze, dafs jede durch $3p-1$ Punkte einer K^3 gelegte K^p auch in einem bestimmten $3p$ten Punkte die erstere trifft. Wir nehmen zu diesem Zwecke irgend vier der gegebenen Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, von denen keine drei in einer Geraden liegen, zu Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels, das mit einem Strahlbüschel A zusammen die K^3, mit einem Büschel von Curven K^{p-2} die K^p (§ 147) erzeugt. In jedem der $3p-4$ übrigen Schnittpunkte beider Curven trifft sich ein Kegelschnitt mit seiner Gera-

den und seiner K^{p-2}. A und die $3p-4$ anderen Punkte liegen daher im Durchschnitt der gegebenen K^3 mit einer Curve $(p-1)$ter Ordnung K^{p-1}, die nämlich das Erzeugniſs des Strahlbüschels und des projectivischen Büschels der K^{p-2} ist[38]. Wird vorausgesetzt, wie es für $p-1=2$ zutrifft, daſs $3p-4$ von ihnen den letzten eindeutig bestimmen, so gilt dasselbe von $3p-1$ der gegebenen für den letzten Schnittpunkt der K^p, da nämlich A durch A_1, A_2, A_3, A_4 zweifellos bestimmt wird und mit $3p-5$ anderen zusammen den $3p$ten Schnittpunkt bestimmt. Ist ein Theil der $3p$ Schnittpunkte der volle Durchschnitt einer K^m, so bildet diese zusammen mit einer K^{p-m} durch $3(p-m)-1$ der übrigen Punkte eine K_1^p, die $3p-1$ und folglich alle $3p$ Schnittpunkte der K^p mit der K^3 enthält, woraus aber offenbar der Satz folgt.

Für den allgemeinen Fall muſs, unter Voraussetzung des entsprechenden Satzes für n und kleinere Zahlen (§ 153), ein anderes Verfahren eingeschlagen werden[39]. Ist zuerst m kleiner als $n+1$, so liegen eben nach der Voraussetzung die $(p-n-1)m$ Punkte, in welchen sich K^p und K^m auſserhalb K^{n+1} noch treffen, auf einer Curve K^{p-n-1} $(p-n-1)$ter Ordnung. Sie bildet mit der K^{n+1} zusammen eine zweite Curve $\mathfrak{K}^p$ $p$ter Ordnung. Von den p^2 Schnittpunkten zwischen K^p und $\mathfrak{K}^p$ liegen pm auf der K^m. Daher liegen nach dem bereits Bewiesenen (§ 167) die übrigen Schnittpunkte auf einer Curve K^{p-m} $(p-m)$ter Ordnung, auf der also auch die Schnittpunkte zwischen K^p und K^{n+1} auſserhalb K^m liegen. Der Beweis setzt nur scheinbar voraus, daſs K^p und K^m sich in pm verschiedenen Punkten treffen. An die Stelle von K^p kann nämlich jede andere Curve $p$ter Ordnung treten, die K^{n+1} in denselben $p(n+1)$ Punkten trifft. Ergänzen wir nun letztere durch eine Curve K^{p-n-1}, die keinen der Schnittpunkte zwischen K^p und K^{n+1}, sowie zwischen K^p und K^m enthält, zu einer $\mathfrak{K}^p$, so schneiden (§ 166) nur eine endliche Anzahl von Curven des Büschels $K^p, \mathfrak{K}^p$ die K^m in weniger als pm Punkten, wenn K^{p-m-1} und K_m sich in $(p-m-1)m$ verschiedenen Punkten treffen.

Da K^m und K^{n+1} sich in $m(n+1)$ von einander verschiedenen Punkten treffen, so können von den Theilen, in die irgend eine etwa zerfällt, keine zwei übereinstimmen. Daher folgt aus § 142 (resp. 131) in Verbindung mit § 114, daſs unendlich viele Geraden in m, unendliche viele Zusammenstellungen von $p-n-1$ Geraden in $(p-n-1)m$ verschiede-

nen Punkten die Curve K^m treffen. Aus § 166 folgt sehr leicht, dafs auch allgemeine Curven K^{p-n-1} derselben Bedingung Genüge leisten. Unser Satz ist daher für den Fall $m < n+1$ auch dann bewiesen, wenn die Curve $p$ter Ordnung K^p der Curve K^m in $p \cdot m$ von einander verschiedenen Punkten nicht begegnen sollte.

Falls m nicht kleiner als $n+1$ ist, dient zum Beweise der Restsatz. Werden die $(n+1)m$ Punkte, welche K^{n+1} und K^m gemeinsam sind, in zwei Gruppen I) und II) zerlegt, machen II) und III) den Durchschnitt einer Curve $q$ter, III) und IV) aber den vollständigen Durchschnitt einer Curve $r$ter Ordnung aus, so bilden I) und IV) den vollständigen Durchschnitt einer Curve $(r+m-q)$ter Ordnung. Der Beweis folgt, falls q kleiner als $n+1$ ist, und die in I), II), III) und IV) vorkommenden Punkte alle von einander verschieden sind, unmittelbar aus dem bereits Bewiesenen. Denn die vier Gruppen bilden zusammen den Durchschnitt unendlich vieler Curven $(r+m)$ter Ordnung mit K^{n+1}, die Punkte von II) und III) aber sind einer K^q mit der K^{n+1} gemeinsam. Da q kleiner als $n+1$ vorausgesetzt wird, so liegen I) und IV) auf derselben Curve $(r+m-q)$ter Ordnung.

Wir versuchen nun insbesondere die Annahmen n und $n-1$ für q und r einzuführen. Dann darf II) höchstens $\frac{n(n+3)}{2}$, III) höchstens $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte enthalten, denn im Allgemeinen finden besondere Beziehungen unter den $m(n+1)$ Schnittpunkten nicht statt, und es bestimmen daher irgend $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte (§ 154) eine eigentliche Curve $n$ter Ordnung, die keine weiteren Schnittpunkte der beiden Curven K^{n+1} und K^m enthält. Da nun II) und III) den Durchschnitt einer K^n mit der K^{n+1} ausmachen sollen, so mufs

$$\frac{n(n+3)}{2} + \frac{(n-1)(n+2)}{2} \geqq (n+1)n$$

sein. Die Zahl linker Hand ist aber gleich $n(n+1)+n-1$ und daher wirklich gröfser als die rechter Hand. Die beabsichtigte Mafsregel ist daher in unendlich vielen Weisen durchführbar. Legen wir die Curve $n$ter Ordnung durch $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ der $m(n+1)$ Schnittpunkte zwischen K^m und K^{n+1}, so ist sie nur als Glied eines Netzes zweiter Stufe bestimmt. In

diesem giebt es, wenn man von ganz besonderen Lagen absieht, die als Grenzfälle sich erledigen, ein Büschel, dessen fernere Grundpunkte aufserhalb der K^{n+1} liegen. Auf K^{n+1} schneiden unendlich viele Curven dieses Büschels noch $\frac{(n-1)(n+1)}{2} - (n-1) + 2 = \frac{(n-1)(n+2)}{2} - n + 3$ verschiedene Punkte aus. Ist n gröfser als 3, so geht durch dieselben entweder ein Büschel von Curven $(n-1)$ter Ordnung oder ein ganzes Netz. Für $n = 3$ erhalten wir eine einzelne Curve. Es werden sich, von Grenzfällen abgesehen, durch die letzteren Punkte Curven $(n-1)$ter Ordnung legen lassen, welche die K^{n+1} in $(n-1)(n+1)$ verschiedenen Punkten treffen, unter denen solche von I) nicht mehr vorkommen. I) und IV) bilden nun den Durchschnitt einer Curve $(n-1+m-n)$ter oder $(m-1)$-ter Ordnung. Da m beliebig grofs sein kann, so gilt diese Überlegung auch für K^p. Bezeichnet man mit V) die Punktgruppe, die sie aufser I) und II) noch mit K^{n+1} gemeinsam hat, so liegen V), I) und IV) im Durchschnitt einer Curve $(p-1)$ter Ordnung. Damit ist der Satz auf den entsprechenden zurückgeführt, wo nur $p-1$ und $m-1$ an die Stelle von p und m treten. In entsprechender Weise können wir zwei Gruppen I_1) und IV_1) finden, die zusammen mit V) den Durchschnitt einer K^{p-2} mit der K^{n+1} ausmachen, andererseits für sich allein aus den Schnittpunkten einer Curve $(m-2)$ter Ordnung bestehen. Den entsprechenden Schlufs können wir so lange wiederholen, bis die dritte Curve auf die Ordnung n herabsinkt. Alsdann liegt V) mit I_{m-n-1}) und IV_{m-n-1}) in dem Durchschnitt der K^{n+1} und einer K_1^{p+n-m}, I_{m-n-1}) und IV_{m-n-1}) aber bilden den Durchschnitt der K^{n+1} und einer K_1^n. Daher liegt nach dem ersten Theile unseres Beweises die Gruppe V) auf einer Curve $(p-m)$ter Ordnung.

Man kann mit grofser Leichtigkeit Schnittpunktsysteme herstellen, in denen solche Gruppen von $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ Punkten vorkommen, die ein allgemeines Netz von Curven $n$ter Ordnung constituiren, denen allen nur jene Punkte gemeinsam sind. Ferner kann erreicht werden, dafs eine Curve desselben die K^{n+1} in noch $\frac{(n-1)(n+2)}{2} - n + 3$ verschiedenen Punkten trifft, deren Verbindungscurve $(n-1)$ter Ordnung nur in einfachen Punkten der K^{n+1} begegnet. Hieraus folgt der Lehrsatz, indem nämlich eine singuläre Anordnung der Punkte wirklich den Aus-

nahmefall bildet, und daher andere Schnittpunktsysteme in jeder Nähe liegen, für welche der Satz gilt.

§ 169. Wenn auf einer eigentlichen Curve $(n+1)$ter Ordnung unter ihren $p(n+1)$ Schnittpunkten mit einer $K^p (p \geqq n+1)$ $\frac{n(n-1)}{2}$ solche sich finden, die nicht derselben Curve $(n-2)$ter Ordnung angehören, so gehen alle Curven $p$ter Ordnung, welche die $(n+1)p - \frac{n(n-1)}{2}$ übrigen enthalten, auch durch jene letzten Punkte.

Die $(n+1)p$ Punkte mögen in zwei Gruppen I) und II) vertheilt werden. Es fragt sich, wie viele Punkte muſs die letztere mindestens enthalten, wenn sich I) mit anderen Gruppen IV) der K^{n+1}, die aus derselben Anzahl von Punkten bestehen, wie II), durch Curven $p$ter Ordnung verbinden lassen soll. Eine Curve K_q, die II) mit einer Hülfsgruppe III) verbindet, bildet eine Curve $(p+q)$ter Ordnung K^{p+q} mit derjenigen Curve $\mathfrak{K}^p$ $p$ter Ordnung, die I) und IV) verbindet. Da aber I) und II) durch eine Curve $p$ter Ordnung verbunden sind, so geht eine Curve $q$ter Ordnung K^q durch III) und IV). Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, daſs II) von I) nicht eindeutig abhängt, ist also die, daſs die Punkte der Gruppe III), welche mit denen von II) in einer K^q liegen, auch wenn sie von einander verschieden sind, n i c h t hinreichen, die Gruppe II) zu bestimmen. Diese Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn, q kleiner als $n+1$ vorausgesetzt, II) nicht mehr, III) aber weniger als $\frac{q(q+3)}{2}$ Punkte enthält. Ist also

$$q(q+3)-1 \geqq q(n+1)\ ;\ n+1 > q\ ,$$

so kann man sicher sein, daſs statt irgend $\frac{q(q+3)}{2}$ gegebener Punkte des Schnittpunktsystems eine andere Gruppe der K^{n+1} mit derselben Punktzahl sich substituiren läſst. Die Ungleichung kann nur dann bestehen, wenn q wenigstens gleich $n-1$ ist, Verlegungscurven niedrigerer Ordnung lassen sich nur dann anwenden, wenn besondere Beziehungen obwalten.

Die Gruppe III) gestattet aber unendlich vielen K^{n-1} den Durchgang, wenn sie aus höchstens (§ 154) $\frac{(n-1)(n+2)}{2} - 1$ Punkten besteht. Dann aber besteht II) aus wenigstens $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ Punkten. Solche Gruppen

also, welche von den gegebenen Schnittpunkten zwei mehr enthalten, als zur Bestimmung einer Curve K^{n-2} hinreichen, können durch gleichzahlige ersetzt werden, ohne daſs Beziehungen zwischen ihnen angenommen werden.

$\frac{(n-1)n}{2}$ Punkte lassen sich, während die $(n+1)p - \frac{n(n-1)}{2}$ übrigen fest bleiben, durch andere $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkte ersetzen, wenn sie auf einer K^{n-2} liegen. Diese trifft nämlich noch in

$$(n-2)(n+1) - \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n - 2 - \frac{n^2-n}{2}$$
$$= \frac{n^2-n-2}{2} - 1 = \frac{(n-2)(n+1)}{2} - 1$$

Punkten, durch welche sich daher ein Büschel von Curven $(n-2)$ter Ordnung legen läſst. Jede bestimmt auf der K^{n+1} eine Gruppe von $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkten, die mit den $(n+1)p - \frac{n(n-1)}{2}$ festen Punkten zusammen ein Schnittpunktsystem bilden. Diese Bedingung ist nicht nur hinreichend, sondern auch nothwendig, damit irgend $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkte oder einzelne von ihnen allein an einem Schnittpunktsystem verändert werden können.

Sind $\frac{n(n-1)}{2} - l$ Punkte ein allein veränderlicher Theil II) eines solchen Schnittpunktsystems, so ist die Gruppe III) von

$$(n-1)(n+1) - \frac{(n-1)n}{2} + l = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + l$$

Punkten, die unter gewöhnlichen Umständen eine Curve $(n-1)$ter Ordnung be- resp. überbestimmen, für ein ganzes Büschel resp. ein Netz durchlässig. Es seien zuerst Curven $(n-1)$ter Ordnung durch diese im Allgemeinen getrennten Punkte möglich, die sich nur noch in einer Gruppe V) von

$$(n-1)^2 - \frac{(n-1)(n+2)}{2} - l = \frac{(n-1)(n-4)}{2} - l \qquad 2)$$

im Allgemeinen getrennten Punkten treffen. Sie lassen sich schon für $l=0$ durch eine Curve $(n-4)$ter Ordnung verbinden, a fortiori also, wenn l gröſser als 0 ist (§ 154). Diese K^{n-4} bildet mit der gegebenen K^{n+1} eine Curve K^{2n-3}. Sie schneidet die II) und III) verbindende K^{n-1} auſser in diesen noch in der Gruppe V) und der anderen VI) von $\frac{(n-4)(n-1)}{2}$ $+ l$ Punkten, in denen K^{n-1} und K^{n-4} sich auſserhalb V) noch treffen.

Da nun III) und V) den Durchschnitt einer zweiten Curve K_1^{n-1} $(n-1)$-ter Ordnung mit K^{n-1} ausmachen, so liegen nach § 168 II) und VI) in derselben Curve K^{n-2} $(n-2)$ter Ordnung. Die Curve K^{n-4}, welche nur die Gruppe V), also $\frac{(n-4)(n-1)}{2}-l$ Punkte, zu enthalten braucht, gehört eben deswegen einem $l$fachen Netz an, in dem sie willkürlich gewählt werden kann. Daher geht auch durch die Gruppe II) von $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-l$ Punkten noch ein Netz $l$ter Stufe von Curven $(n-2)$ter Ordnung, während im allgemeinen Falle nur ein solches $(l-1)$ter Stufe, im Falle des verschwindenden l aber überhaupt keine Curve durch eine solche Anzahl von Punkten sich legen läfst. Mit irgend l anderen Grundpunkten, welche den gegebenen Curven K^p und K^{n+1} gemeinsam sind, liegen die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-l$ Punkte in einer Curve $(n-2)$ter Ordnung.

Es ist noch der Fall zu bedenken, wo die Gruppe III) nicht mehr von eigentlichen Curven $(n-1)$ter Ordnung umfafst werden kann, dieselben vielmehr sämmtlich in eine unveränderliche Curve und eine allein bewegliche Curve $m$ter Ordnung zerfallen $(m<n-1)$. Die beweglichen Punktgruppen II), II_1), II_2), ... welche mit I) Schnittpunktsysteme von Curven K^p mit K^{n+1} bilden, sind dann auf Curven $m$ter Ordnung $K^m, K_1^m, K_2^m, \ldots$ gelagert. Doch müssen diese Gruppen wenigstens $m(n+1-m)$ Punkte enthalten, denn die Schnittpunkte zwischen K^m und K^{n+1} gehören entweder II) an, oder werden auch von allen anderen Curven $K_1^m, K_2^m, \ldots$ bestimmt und gehören zu den m^2 Grundpunkten von K_1^m, K_2^m. Es enthalte II) zuerst $(n+1)m-\frac{m(m+3)}{2}+1+l$ Punkte, so dafs K^m in nicht mehr Punkten K^{n+1} noch trifft, als zur Bestimmung eines Büschels eben hinreichen. Weil nun

$$\frac{(n-m-2)(n-m+1)}{2}-l=\frac{(n-1)n}{2}-(n+1)m+\frac{m(m+3)}{2}-l-1$$

ist, so liegt von irgend $\frac{(n-1)n}{2}$ Punkten des Schnittpunktsystems, in dem II) vorkommt, der Rest auf einer Curve $(n-m-2)$ter Ordnung; alle Punkte zusammen gehören einer Curve $(n-2)$ter Ordnung an.

Andererseits mögen $(n+1)m-\frac{m(m+3)}{2}-l$ Punkte, wo $l=0$ ebenfalls zu beachten ist, in jeder der Gruppen II, II_1, II_2, ... gelegen

sein. Zwei Curven K^m und K_1^m schneiden sich in $\frac{m(m+3)}{2}+l$ Punkten von K^{n+1} und in $m^2-\frac{m(m+3)}{2}-l=\frac{m(m-3)}{2}-l$ Punkten aufserhalb derselben. Durch diese läfst sich daher ein $l$fach unendliches Netz von Curven $(m-3)$ter Ordnung legen. Jede einzelne bildet mit K^{n+1} eine Curve $\mathfrak{K}^{n+m-2}$ $(n+m-2)$ter Ordnung. Von den $m(n+m-2)$ Schnittpunkten derselben mit K^m liegen m^2 auf K_1^m, die übrigen, unter ihnen die Punkte von II), im Durchschnitt einer Curve $(n-2)$ter Ordnung mit K^m. Man erhält ein $l$fach unendliches Netz solcher Curven, keine zwei schneiden, wenn l gröfser als 0 ist, dasselbe Punktsystem auf K^m aus, alle aber enthalten die Punktgruppe II). Eine einzelne der Curven bildet mit denjenigen ein Netz $\frac{(n-m-1)(n-m)}{2}$ter Stufe, welche aus K^m und den Curven $(n-m-2)$ter Ordnung der Ebene bestehen. Daher erhalten wir insgesammt ein Netz $\left(\frac{(n-m-1)(n-m)}{2}+l\right)$ter Stufe, dessen Curven alle die Punktgruppe II) enthalten. Da wir eine Curve desselben durch irgend $\frac{(n-m-1)(n-m)}{2}+l$ Punkte legen können, so lassen irgend $\frac{(n-1)n}{2}$ Punkte, unter denen eine solche besondere Punktgruppe vorkommt, sich durch eine Curve $(n-2)$ter Ordnung verbinden.

§ 170. Wenn eine Curve $p$ter Ordnung durch alle Schnittpunkte zweier Curven $m$ter und $(n+1)$ter Ordnung bis auf

$$\tfrac{1}{2}(m+\overline{n+1}-p-1)(m+\overline{n+1}-p-2)$$

beliebige unter ihnen hindurchgeht, so mufs sie auch diese letzteren enthalten, wenn sie nicht derselben Curve $(m+\overline{n+1}-p-3)$ter Ordnung angehören, und

$$m+\overline{n+1}-3>p>m>n+1>3 \text{ ist.}$$

Es sei eine Curve K^p möglich, welche nur

$$\nu=\tfrac{1}{2}(m+\overline{n+1}-p-1)(m+\overline{n+1}-p-2)$$

Punkte des vollständigen Durchschnittes zwischen K^m und K^{n+1} nicht enthält. Durch diese Punkte lassen sich unendlich viele $K^{m+\overline{n+1}-p-2}$ legen; irgend eine von ihnen bildet mit K^p eine Curve $K^{m+\overline{n+1}-2}$. $m(n+1)$ von

ihren Schnittpunkten mit K^{n+1} liegen auf K^m, die übrigen auf einer Curve K^{n-1} $(n-1)$ter Ordnung. Unter den $(n-1)(m+\overline{n+1}-p-2)$ Schnittpunkten der K^{n-1} mit $K^{m+\overline{n+1}-p-2}$ kommen die aufserhalb K^m gelegenen Schnittpunkte der letzteren mit K^{n+1} vor. Überdies haben K^{n-1} und $K^{m+\overline{n+1}-p-2}$

$$(n-1)(m+\overline{n+1}-p-2) - (n+1)(m+\overline{n+1}-p-2)$$
$$+\tfrac{1}{2}(m+\overline{n+1}-p-1)(m+\overline{n+1}-p-2)$$
$$=\tfrac{1}{2}(m+\overline{n+1}-p-2)(m+\overline{n+1}-p-5)$$

gemeinsame Punkte, die gerade zur Bestimmung einer Curve $K^{m+\overline{n+1}-p-5}$ hinreichen. Sie bildet mit K^{n+1} eine Curve $(m+2(n+1)-p-5)$ter Ordnung. $(m+\overline{n+1}-p-2)(n-1)$ von ihren Schnittpunkten mit $K^{m+\overline{n+1}-p-2}$ liegen auf K^{n-1}. Die anderen, also auch die betrachteten ν Punkte liegen auf einer Curve der Ordnung $(m+\overline{n+1}-p-3)$. Ist durch diese Punkte eine solche Curve nicht möglich, so mufs die Gruppe jeder Curve $p$ter Ordnung angehören, welche die $m(n+1)-\nu$ übrigen Schnittpunkte zwischen K^m und K^{n+1} enthält.

All the ν points are common to K^{n+1} and $K^{m+\overline{n+1}-p-2}$

§ 171. Durch $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ Punkte der Ebene ist im Allgemeinen eine Curve $(n+1)$ter Ordnung möglich, durch irgend $\frac{(n+1)(n+4)}{2}-1$ Punkte ein Büschel, dessen Curven einander sämmtlich noch in denselben $\frac{n(n-1)}{2}$ von einander verschiedenen Punkten begegnen. Nur wenn bei irgend zweien der Curven die ferneren Schnittpunkte derselben Curve $(n-2)$ter Ordnung angehören, reichen die $\frac{(n+1)(n+4)}{2}-1$ Punkte nicht zur Bestimmung eines Büschels und alle gegebenen Punkte nicht zur Bestimmung einer Curve aus.

$C_1 C_2 \ldots C_{\frac{1}{2}(n+1)(n+4)}$ seien die gegebenen Punkte; unter den $(n+1)^2$ von einander verschiedenen Grundpunkten eines Büschels von Curven K^{n+1} mögen sich die λ ersten der gegebenen Punkte $\left[\lambda \text{ kleiner als } \frac{(n+1)(n+4)}{2}-1\right]$ bereits befinden. Irgend $\frac{n(n-1)}{2}+1$ der übrigen Grundpunkte verbinde man durch eine Curve K^{n-1}; die durch $C_{\lambda+1}$ gehende Curve K_1^{n+1} des Büschels trifft sie noch in $\frac{(n-1)(n+2)}{2}-1$ Punk-

Take points on K_1^{n-1} and K_1^{n+1} not on K^{n-1}

ten. Dieselben bestimmen mit $C_{\lambda+1}$ eine Curve K_1^{n-1}. Die Punktgruppe, welche diese Curve allein auf der K_1^{n+1} ausschneidet, und in der $C_{\lambda+1}$ liegt, bildet mit den fest gebliebenen Grundpunkten die Basis eines neuen Büschels von Curven K^{n+1}. Wenn man auf solche Art schliefst, kann man, von einem ganz beliebigen Büschel mit $(n+1)^2$ verschiedenen Grundpunkten ausgehend, Büschel herstellen, unter deren Grundpunkten

$$C_1;\, C_1, C_2;\, C_1, C_2, C_3;\, C_1, C_2, C_3, C_4;\, \ldots\, C_1 C_2 C_3 \ldots C_{\frac{1}{2}(n+1)(n+4)-1}$$

sich vorfinden. Das letzte Büschel ist nur in dem Ausnahmefall durch die angegebenen Grundpunkte nicht eindeutig bestimmt, wenn irgend zwei durch diese Punkte gelegte Curven $(n+1)$ter Ordnung sich noch in $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkten einer K^{n-2} treffen. Im Allgemeinen ist daher durch den letzten Punkt eine Curve eindeutig bestimmt.

Nur bei ganz besonderen Lagen von $C_{\lambda+1}$ kann die Hülfscurve K_1^{n+1} in Theile zerfallen, da in einem Büschel mit $(n+1)^2$ verschiedenen Grundpunkten nur eine endliche Zahl zerfallender Curven sich vorfinden kann. Die $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte werden ferner ebenfalls in nur sehr speciellen Fällen so gelegen sein, dafs keine eigentliche K^{n-1} sie verbindet. Diejenigen Punktsysteme, welche auf solche speciellen Lagen führen, dürfen daher als Grenzfälle erledigt werden.

§ 172. Auf jeder Curve K^{n+1} $(n+1)$ter Ordnung kann man $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ Punkte so bestimmen, dafs nur sie allein durch dieselben hindurchgeht.

Hierzu ist nach den §§ 169 und 171 der Nachweis nothwendig und hinreichend, dafs unter ihren $(n+1)^2$ Schnittpunkten mit irgend einer anderen Curve $\mathfrak{K}^{n+1}$ $(n+1)$ter Ordnung $\frac{(n-1)n}{2}$ solche Punkte sich finden, die nicht derselben Curve $(n-2)$ter Ordnung angehören. Zu diesem Zwecke schneiden wir die K^{n+1} durch $n+1$ von einander verschiedene Geraden. Da wir dieselbe als allgemein voraussetzen, wird sie von ihnen in $(n+1)^2$ verschiedenen Punkten getroffen werden. Wir wählen der Reihe nach $1, 2, 3, \ldots n-2, n-1$ Schnittpunkte auf den $n-1$ ersten Geraden aus. Lägen nun diese Punkte auf derselben Curve $(n-2)$ter Ordnung, so

müfste dieselbe jedenfalls die letzte Gerade ganz enthalten und daneben (§ 142) eine Curve $(n-3)$ter Ordnung. Diese wieder müfste in die vorletzte Gerade und eine Curve $(n-4)$ter Ordnung zerfallen; letztere müfste wieder die drittletzte Gerade enthalten, und so würde man endlich auf eine Gerade kommen, welche die drei ersten Punkte enthalten müfste, die aber unmöglich ist. Nach § 169 ist daher die vorliegende Curve jedenfalls die einzige, welche durch die übrigen $\frac{(n+1)(n+4)}{2} - 1$ Schnittpunkte der $n+1$ gezogenen Geraden und irgend einen ihrer anderen Punkte hindurchgeht, nach der Entwickelung des § 171 kann man unendlich viele andere Gruppen von $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ Punkten der K^{n+1} finden, durch welche nur sie allein sich legen läfst.

Sechster Abschnitt.

Bestimmung einer Curve nter Ordnung durch gegebene Punkte. §§ 173—178.

§ 173. Nach Grafsmann's Definition ist die Curve $n$ter Ordnung der Ort eines Punktes, der in einer aus ihm durch lineale Construction abgeleiteten Geraden liegt. In derselben kommt neben gegebe-

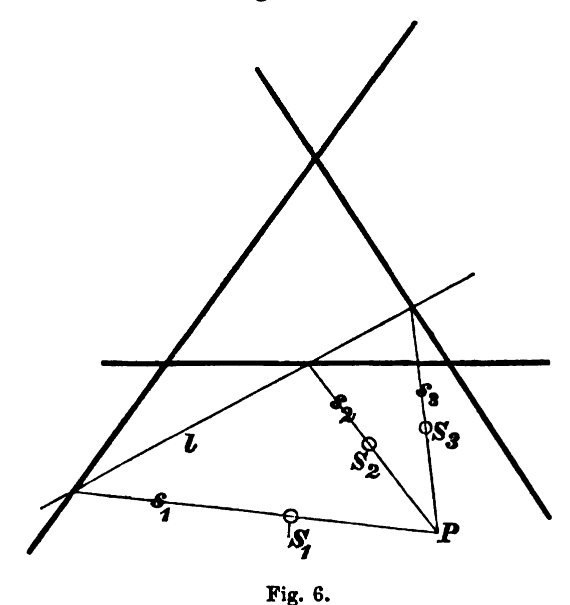


Fig. 6.

nen Punkten und Geraden der bewegliche Punkt $n$mal vor. So durchschneiden sich in jedem Punkte einer Curve dritter Ordnung drei Geraden s_1, s_2, s_3, die von festen Punkten S_1, S_2, S_3 ausgehen und die Seiten eines gegebenen Dreiecks in drei Punkten einer Geraden l treffen (Fig. 6).

So kann man jede Curve vierter Ordnung mit Hülfe von vier um S_1, S_2, S_3, S_4 beweglichen Strahlen s_1, s_2, s_3, s_4 erzeugen, welche in die durch nebenstehende Figur 7 angedeutete und leicht verständliche Abhän-

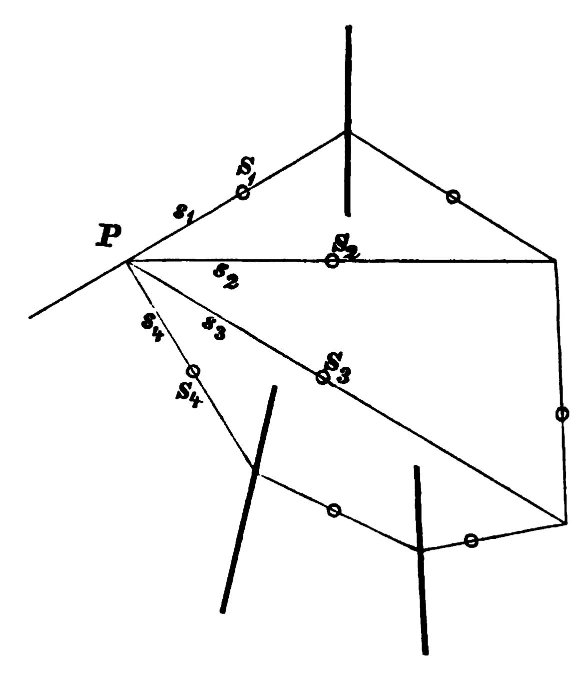


Fig. 7.

gigkeit gesetzt sind. Sieht man davon ab, dafs die drei Strahlen des ersten Falles in einem Punkte der betrachteten Curve dritter Ordnung sich schneiden, so hat man es mit einer zweifach unendlichen Gesammtheit von Geradentripeln zu thun. In jedem Tripel ist eine Gerade durch die beiden anderen bestimmt. Wird eine von ihnen beliebig festgehalten, so ist l nur noch um einen Punkt der einen Dreiecksseite drehbar. Die beiden anderen Strahlen können daher noch projectivische Strahlbüschel beschreiben. In jedem Curvenpunkt treffen sich drei zusammengehörige Strahlen dieser trilinear bezogenen Büschel.

Giebt man bei der zweiten Betrachtungsweise die Forderung auf,

dafs die vier Strahlen in einem Punkte der K^4 sich treffen sollen, so ist doch noch durch irgend drei derselben ein zugehöriger des vierten Büschels eindeutig bestimmt. Wenn man irgend zwei derselben fixirt, so beschreiben die beiden anderen Strahlen projectivische Gebilde. Daher stehen die vier Büschel in vierfach linearer Beziehung, und es ist die Curve vierter Ordnung der Ort der Punkte, in denen je vier entsprechende Strahlen der linear bezogenen Büschel sich treffen. Diese Betrachtungsweise der Curven soll im Folgenden verallgemeinert werden[40].

§ 174. Man kann $n+1$ verschiedene Strahlbüschel so in Beziehung setzen, dafs zu n beliebig ausgewählten Strahlen $o_{i_1}^{(\alpha)}, o_{i_2}^{(\beta)}, o_{i_3}^{(\gamma)}, \ldots o_{i_n}^{(\nu)}$ von irgend n Büscheln im Allgemeinen ein einziges Element $o_{i_{n+1}}^{(\alpha\beta\gamma\ldots\nu)}$ oder $o_{i_{n+1}}^{(\rho)}$ des letzten Trägers gehört. Werden irgend $n-1$ dieser Strahlen, etwa $o_{i_1}^{(\alpha)}, o_{i_2}^{(\beta)}, \ldots o_{i_{n-1}}^{(\mu)}$, festgehalten, so beschreiben die beiden anderen, $o_{i_n}^{(\nu)}$ und $o_{i_{n+1}}^{(\rho)}$, projectivische Büschel. Wird einer jener $n-1$ Strahlen in andere und andere Lagen gebracht, so gehören dem festen Büschel, das der $n$te, $o_{i_n}^{(\nu)}$, beschreibt, die Büschel einer Schaar zu. Die beiden Doppelstrahlen $(o_{i_{n+1}}^{(\rho)})_1$ und $(o_{i_{n+1}}^{(\rho)})_2$ derselben bilden mit den zugehörigen Strahlen $(o_{i_n}^{(\nu)})_1$ und $(o_{i_n}^{(\nu)})_2$, sowie mit der festen Anordnung der $n-2$ ersten Strahlen eine singuläre Gruppe, der in dem $(n-1)$ten Büschel kein bestimmter Strahl zukommt.

Durch irgend zwei $(n+1)$fach lineare Systeme ist eine ganze Schaar solcher Systeme bestimmt. Fixirt man irgend $n-1$ der Strahlen, und läfst man einen $n$ten ein bestimmtes Büschel durchlaufen, so entsprechen demselben in den verschiedenen Systemen die Büschel einer Schaar; die Leitbüschel aller dieser Schaaren sind zu einander projectivisch.

Man kann aus Curven genügend hoher Ordnung, die in der Ebene des letzten Strahlbüschels liegen, ein Netz von beliebig hoher Ordnung (λ) zusammensetzen.

Es mögen die Büschel

$$U_{11}U_{21}U_{31}\ldots U_{\alpha 1} \barwedge U_{12}U_{22}U_{32}\ldots U_{\alpha 2} \barwedge U_{13}U_{23}U_{33}\ldots U_{\alpha 3} \barwedge \ldots \barwedge U_{1\beta}U_{2\beta}U_{3\beta}\ldots U_{\alpha\beta}$$

einer in ihm gelegenen Schaar projectivisch auf das Büschel $o_1' o_1'' o_1''' \ldots o_1^{(\alpha)}$ bezogen werden, ihre Leitbüschel

$$U_{11}U_{12}U_{13}\dots U_{1\beta} \barwedge U_{21}U_{22}U_{23}\dots U_{2\beta} \barwedge U_{31}U_{32}U_{33}\dots U_{3\beta} \barwedge \dots \barwedge U_{\alpha 1}U_{\alpha 2}U_{\alpha 3}\dots U_{\alpha\beta}$$

aber zu dem Büschel $o_2' o_2'' o_2''' \dots o_2^{(\beta)}$ projectivisch sein; alsdann gehört jeder Zusammenstellung $o_1^{(\alpha)} o_2^{(\beta)}$ eine bestimmte Curve zu.

Es seien nun zwei projectivische Schaaren in dem Gesammtnetze gegeben, deren Büschel ebenfalls alle unter einander projectivisch sind. Dieselben mögen in folgender Weise bezeichnet werden:

$$U_{111}U_{121}U_{131}\dots U_{1\beta 1} \barwedge U_{211}U_{221}U_{231}\dots U_{2\beta 1} \barwedge U_{311}U_{321}U_{331}\dots U_{3\beta 1} \barwedge \dots \barwedge U_{\alpha 11}U_{\alpha 21}U_{\alpha 31}\dots U_{\alpha\beta 1}$$

und

$$U_{112}U_{122}U_{132}\dots U_{1\beta 2} \barwedge U_{212}U_{222}U_{232}\dots U_{2\beta 2} \barwedge U_{312}U_{322}U_{332}\dots U_{3\beta 2} \barwedge \dots \barwedge U_{\alpha 12}U_{\alpha 22}U_{\alpha 32}\dots U_{\alpha\beta 2}\,.$$

Alle diese Büschel sind zu einander projectivisch, und dasselbe gilt von allen Leitbüscheln, etwa von

$$U_{111}U_{211}U_{311}\dots U_{\alpha 11} \barwedge U_{121}U_{221}U_{321}\dots U_{\alpha 21} \barwedge U_{1\beta 1}U_{2\beta 1}U_{3\beta 1}\dots U_{\alpha\beta 1}$$

und

$$U_{112}U_{212}U_{312}\dots U_{\alpha 12} \barwedge U_{122}U_{222}U_{322}\dots U_{\alpha 22} \barwedge U_{1\beta 2}U_{2\beta 2}U_{3\beta 2}\dots U_{\alpha\beta 2}$$

Man kann die beiden Netze dritter Stufe, in denen die Schaaren liegen, in einer einzigen Weise so beziehen, dafs den Curven U_{111}, U_{121}, U_{211}, U_{221}, U_{331} die anderen U_{112}, U_{122}, U_{212}, U_{222}, U_{332} entsprechen. Bei dieser collinearen Beziehung entsprechen sich nämlich zunächst die Büschel $U_{131}U_{231}U_{331}\dots U_{\alpha 31}$ und $U_{132}U_{232}U_{332}\dots U_{\alpha 32}$, denn nur durch das erstere Büschel kann man U_{331} mit irgend zwei Curven (U_{131} und U_{231}) der Büschel U_{111}, U_{121} und U_{211}, U_{221} verbinden, und andererseits verbindet allein das zweite Büschel U_{332} mit zwei Curven U_{132} und U_{232} der beiden Büschel U_{112}, U_{122} und U_{212}, U_{222}.

Hieraus folgt aber, dafs auch

$$U_{111}U_{121}U_{131}\dots U_{1\beta 1} \barwedge U_{112}U_{122}U_{132}\dots U_{1\beta 2}$$

entsprechende Büschel sind, und dafs

$$U_{211}U_{221}U_{231}\dots U_{2\beta 1} \barwedge U_{212}U_{222}U_{232}\dots U_{2\beta 2}$$

einander zugehören. Weiter folgt, dafs die Büschel

$$U_{311}U_{321}U_{331}\dots U_{3\beta 1} \barwedge U_{312}U_{322}U_{332}\dots U_{3\beta 2}$$

sich entsprechen. Denn das erstere Büschel allein verbindet U_{331} mit Curven U_{311}; U_{321}; U_{341}; ... der Büschel

$$U_{111}, U_{211}; U_{121}, U_{221}; U_{141}, U_{241}; \ldots$$

Ihm gehört das einzige Büschel gleicher Art im zweiten Netze dritter Stufe zu. Nunmehr entsprechen sich in den collinearen Netzen dritter Stufe je zwei Leitbüschel

$$U_{\alpha 11} U_{\alpha 21} U_{\alpha 31} \ldots U_{\alpha\beta 1} \;\overline{\wedge}\; U_{\alpha 12} U_{\alpha 22} U_{\alpha 32} \ldots U_{\alpha\beta 2}.$$

Überhaupt gehören zwei analog bezeichnete Curven $U_{\lambda\mu 1}$ und $U_{\lambda\mu 2}$ einander zu. Die beiden Netze dritter Stufe constituiren eine Schaar collinearer Netze, von denen homologe Curven in projectivischen Büscheln angeordnet liegen.

Den beiden gegebenen Schaaren projectivischer Büschel gehören andere Schaaren in allen übrigen Netzen dritter Stufe zu. Homologe Büschel in allen diesen Schaaren ordnen sich zu einer neuen Schaar; dasselbe ist mit homologen Leitbüscheln der Fall.

Wir erhalten mithin eine dreifache Gesammtheit $(U_{\alpha\beta\gamma})$ von Curven $U_{\alpha\beta\gamma}$; bei festem β und γ erhalten wir Büschel

$$U_{1\beta\gamma} U_{2\beta\gamma} U_{3\beta\gamma} \ldots U_{\alpha\beta\gamma},$$

die alle unter sich projectivisch sind und auf ein festes Strahlbüschel $o_1' o_1'' o_1''' \ldots o_1^{(\alpha)}$ bezogen werden können. Bei festem α und γ erhalten wir andere projectivische Büschel

$$U_{\alpha 1\gamma} U_{\alpha 2\gamma} U_{\alpha 3\gamma} \ldots U_{\alpha\beta\gamma},$$

die alle auf ein Strahlbüschel $o_2' o_2'' o_2''' \ldots o_2^{(\beta)}$ bezogen werden können. Schliefslich können die Büschel

$$U_{\alpha\beta 1} U_{\alpha\beta 2} U_{\alpha\beta 3} \ldots U_{\alpha\beta\gamma}$$

sämmtlich zu dem Strahlbüschel $o_3' o_3'' o_3''' \ldots o_3^{(\gamma)}$ in Beziehung gesetzt werden. Alsdann gehört eben jedem Tripel $o_1^{(\lambda)} o_2^{(\mu)} o_3^{(\nu)}$ eine Curve $U_{\lambda\mu\nu}$ zu. Wenn man zwei Strahlen festhält, so bewegt sich die Curve projectivisch zum dritten. Läfst man für eine feste Lage eines Strahles und für andere und andere Lagen eines zweiten Strahles den dritten immer dasselbe Büschel beschreiben, so durcheilt $U_{\alpha\beta\gamma}$ die Büschel einer Schaar.

Irgend zwei dreifache Gesammtheiten $(U_{\alpha\beta\gamma 1})$ und $(U_{\alpha\beta\gamma 2})$ setzen die Netze 7ter Stufe, denen sie angehören, auf eine einzige Art in colli-

neare Beziehung. Wenn man α, β und γ entweder $= 1$ oder $= 2$ macht, so erhält man acht Paare entsprechender Curven. Weist man noch U_{3331} und U_{3332} einander zu, so ist die Collineation eindeutig gegeben, und eben in ihr entsprechen $(U_{\alpha\beta\gamma 1})$ und $(U_{\alpha\beta\gamma 2})$ einander. Liegen beide in unserem Netze (U), so erhält man offenbar eine ganze Schaar $(U_{\alpha\beta\gamma 1})$ $(U_{\alpha\beta\gamma 2})(U_{\alpha\beta\gamma 3}) \ldots (U_{\alpha\beta\gamma\delta})$, deren Curven eine vierfache Gesammtheit $(U_{\alpha\beta\gamma\delta})$ ausmachen.

Indem man auf gleiche Art weiter schliefst, kommt man endlich zu einer $n$fachen Gesammtheit $(U_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\nu})$ aus Curven unseres Netzes (U). Jede einzelne Curve kann einer Zusammenstellung $o_1^{(\alpha)} o_2^{(\beta)} o_3^{(\gamma)} o_4^{(\delta)} \ldots o_n^{(\nu)}$ zugeordnet werden. Werden $n-1$ der Strahlen festgehalten, so bewegt sich der letzte Strahl mit der Curve projectivisch. Giebt man einem vorletzten Strahle andere und andere Lagen, so entsprechen dem vom letzten Strahle beschriebenen Büschel die Curvenbüschel einer bestimmten Schaar.

Jetzt ergänzt man alle Strahlen $o'_{n+1}, o''_{n+1}, o'''_{n+1}, \ldots$ des $(n+1)$ten Büschels durch dieselbe Curve K $(\lambda-1)$ter Ordnung. Wir nehmen an, dafs dies besondere Büschel in dem Netze (U) bereits vorkommt. Auf dasselbe projiciren wir von einem Netze $(\lambda-1)$ter Stufe aus alle Curven der Gesammtheit $(U_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu})$. Sieht man bei den Projectionen von der unveränderlichen Curve K ab, so erhält man aus jeder Curve $U_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\nu}$ einen Strahl, aus jedem Curvenbüschel ein Strahlbüschel und aus den Curvenbüscheln einer Schaar Strahlbüschel einer Schaar. In ihre gemeinsamen Strahlen werden zwei bestimmte Leitbüschel der ersteren Schaar projicirt.

Werden $n-2$ der ersten Strahlen, etwa $o_{i_3}^{(\gamma)}, o_{i_4}^{(\delta)}, \ldots o_{i_n}^{(\nu)}$, festgehalten, so besteht zwischen den allein beweglichen drei Strahlen o_{i_1}, o_{i_2}, o_{n+1} die im § 31 behandelte trilineare Beziehung. Betrachtet man daher die beiden ersten Strahlen als beweglich, den letzten aber als fest, wo er dann die verschiedenen Bezeichnungen

$$o_{n+1}^{(\alpha_1\beta_1\gamma\delta\ldots\nu)}, o_{n+1}^{(\alpha_2\beta_2\gamma\delta\ldots\nu)}, o_{n+1}^{(\alpha_3\beta_3\gamma\delta\ldots\nu)}, \ldots$$

erfährt, so beschreiben (§ 31) die beiden ersteren projectivische Strahlbüschel

$$o_{i_1}^{(\alpha_1)} o_{i_1}^{(\alpha_2)} o_{i_1}^{(\alpha_3)} \ldots \barwedge o_{i_2}^{(\beta_1)} o_{i_2}^{(\beta_2)} o_{i_2}^{(\beta_3)} \ldots$$

Man sieht mithin, dafs zwischen irgend $n+1$ Strahlbüscheln eine $(n+1)$-fach lineare Beziehung eingeleitet werden kann.

Da zwei beliebige Gesammtheiten $(U_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu 1})$ und $(U_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu 2})$ zu einer ganzen Schaar

$$(U_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu 1})(U_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu 2})(U_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu 3})\ldots(U_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu\varrho})$$

solcher Gesammtheiten Veranlassung geben, so ist durch irgend zwei verschiedene $(n+1)$fach lineare Systeme, welche für die genannten Strahlbüschel bestehen, sofort eine ganze Schaar linearer Systeme gegeben. Werden $n-1$ der Strahlen festgehalten, und durchläuft einer der beiden anderen Strahlen ein Strahlbüschel, so gehören demselben in den verschiedenen Systemen die Büschel einer Schaar zu; die Leitbüschel aller dieser Schaaren sind zu einander projectivisch.

§ 175. Jede Curve $(n+1)$ter Ordnung kann auf mehrfache Art als Erzeugniſs $(n+1)$fach linear bezogener Strahlbüschel dargestellt werden. Die Centren $O_1, O_2, O_3, \ldots O_{n+1}$ dieser Büschel können auf der Curve beliebig gewählt werden. In jedem Curvenpunkte treffen sich die $n+1$ zusammengehörigen Strahlen einer Gruppe. Die Curven eines Büschels, von dem $O_1, O_2, O_3, \ldots O_{n+1}$ Grundpunkte sind, können durch die $(n+1)$fach linearen Systeme einer Schaar dargestellt werden. Das Büschel erweist sich als projectivisch zu der Schaar. Umgekehrt erzeugt jedes $(n+1)$fach lineare System eine Curve $(n+1)$ter Ordnung, und jede Schaar $(n+1)$fach linearer Systeme erzeugt ein Büschel von Curven $(n+1)$ter Ordnung.

Wir erhalten diese Sätze durch Schlüsse von n auf $n+1$. Die Curve K^{n+1} ist das Erzeugniſs der Büschel

$$o_1' o_1'' o_1''' \ldots o_1^{(\alpha)} \;\overline{\wedge}\; K_1^n K_2^n K_3^n \ldots K_\alpha^n .$$

Wir können $O_2, O_3, \ldots O_{n+1}$ als Grundpunkte des letzteren Büschels betrachten. Diese Curven $n$ter Ordnung sind Erzeugnisse $n$fach linearer Systeme einer zum Strahlbüschel projectivischen Schaar. Halten wir irgend $n-2$ Strahlen, etwa $o_2^{(\varepsilon)}, o_3^{(\gamma)}, o_4^{(\delta)}, \ldots o_{n-1}^{(\mu)}$, fest, so beschreiben o_n und o_{n+1} für jede Curve K_α projectivische Strahlbüschel

$$o_n' o_n'' o_n''' \ldots o_n^{(\nu)} \;\overline{\wedge}\; o_{n+1}^{(1,\alpha)} o_{n+1}^{(2,\alpha)} o_{n+1}^{(3,\alpha)} \ldots o_{n+1}^{(\nu,\alpha)} ;$$

die letzteren Büschel durchlaufen mit wechselnden α eine Schaar. Ihre Leitbüschel

$$o_{n+1}^{(1,1)} o_{n+1}^{(1,2)} o_{n+1}^{(1,3)} \ldots o_{n+1}^{(1,\alpha)} \;\overline{\wedge}\; o_{n+1}^{(2,1)} o_{n+1}^{(2,2)} o_{n+1}^{(2,3)} \ldots o_{n+1}^{(2,\alpha)} \;\overline{\wedge}\; \ldots \;\overline{\wedge}\; o_{n+1}^{(\nu,1)} o_{n+1}^{(\nu,2)} o_{n+1}^{(\nu,3)} \ldots o_{n+1}^{(\nu,\alpha)}$$

sind sämmtlich projectivisch zu $o_1' o_1'' o_1''' \ldots o_1^{(\alpha)}$. Wenn man also die Strahlen $o_2, o_3, \ldots o_{n-1}$ fixirt, dem $n$ten andere und andere Lagen giebt, und den ersten ein bestimmtes Büschel durchlaufen läſst, so beschreibt der $(n+1)$te Strahl zu diesem projectivisch die Strahlbüschel einer Schaar. Die $n+1$ Strahlbüschel sind daher in $(n+1)$fach linearer Beziehung. In jedem Curvenpunkte schneiden sich $n+1$ zusammengehörige Strahlen.

Dieses Verfahren dient umgekehrt auch zu dem Nachweise, daſs durch jedes $(n+1)$fach lineare System eine Curve $(n+1)$ter Ordnung bestimmt ist.

Die Curven $(n+1)$ter Ordnung K_1^{n+1}, K_2^{n+1} eines Büschels sind die Erzeugnisse des Strahlbüschels $o_1' o_1'' o_1''' \ldots o_1^{(\alpha)}$ mit den Curvenbüscheln

$$K_{11}^n K_{21}^n K_{31}^n \ldots K_{\alpha 1}^n \;\overline{\wedge}\; K_{12}^n K_{22}^n K_{32}^n \ldots K_{\alpha 2}^n .$$

Hieraus leiten wir lineare Darstellungen derselben ab und aus ihnen eine Schaar $(n+1)$fach linearer Systeme; dieselbe setzen wir zu dem Strahlbüschel $o' o'' o''' \ldots$ projectivisch. Bei einer festen Zusammenstellung $o_1^{(\alpha)}, o_2^{(\beta)}, \ldots o_{n-1}^{(\kappa)}$ gehören dem Büschel $o_n' o_n'' o_n''' \ldots o_n^{(\nu)}$, welches der vorletzte Strahl beschreibt, für die drei zu o', o'' und o''' gehörigen $(n+1)$-fach linearen Systeme die projectivischen Strahlbüschel einer Schaar zu. Hält man also $o_1^{(\alpha)}$ fest, so bestimmen die drei $n$fach linearen Systeme, die wir für $O_2, O_3, \ldots O_{n+1}$ übrig behalten, die Curven $K_{\alpha 1}^n, K_{\alpha 2}^n, K_{\alpha 3}^n$ eines Büschels. Nun ist aus den $n+2$ Strahlbüscheln mit den Centren O, $O_1, O_2, \ldots O_{n+1}$ ein $(n+2)$fach lineares System zusammengesetzt. Halten wir die Strahlen $o''', o_2^{(\beta)}, o_3^{(\gamma)}, \ldots o_{n-1}^{(\kappa)}$ in irgend einer Lage fest, so gehören zu einem festen, von dem vorletzten Strahle beschriebenen Büschel für die verschiedenen Lagen $o_1', o_1'', o_1''', \ldots o_1^{(\alpha)}$ die Büschel einer projectivischen Schaar. Mithin erzeugen die $n$fach linearen Systeme, die mit Hülfe der n letzteren Büschel sich bestimmen lassen, die Curven $K_{13}^n, K_{23}^n, K_{33}^n, K_{43}^n, \ldots$ eines zu $o_1' o_1'' \ldots o_1^{(\alpha)}$ projectivischen Büschels. Diese verschiedenen Büschel gehören zu einer Schaar, weil auch $K_{\alpha 1}^n$, $K_{\alpha 2}^n, K_{\alpha 3}^n, K_{\alpha 4}^n, \ldots$ Curven eines Büschels sind. Nun bestimmen die Büschel dieser Schaar mit $o_1' o_1'' o_1''' \ldots$ die Curven des gegebenen Büschels. Dieselben können also andererseits durch die $(n+1)$fach linearen Systeme der von uns construirten Schaar erzeugt werden.

§ 176. Kennt man von einem Büschel von Curven $n$ter Ordnung n gemeinsame Punkte $O_1, O_2, \ldots O_n$ und für irgend zwei von ihnen die Darstellungen mit Hülfe der von jenen Punkten ausgehenden Strahlbüschel, so kann man für jede andere Curve des Büschels, von der ein Punkt bekannt ist, eine Darstellung finden unter alleiniger Anwendung des Lineals, wenn für alle auftretenden imaginären Strahlen Darstellungen gegeben sind, die zu irgend einem Wurfe (ABA_1B_1) projectivisch sind.

Es sei O der Punkt, durch welchen die Curve des Büschels fixirt wird, $O_1, O_2, O_3, \ldots O_n$ seien die festen Grundpunkte, a_n' und a_n'' die Strahlen, welche für die gegebenen Darstellungen der Zusammenstellung $OO_1, OO_2, \ldots OO_{n-1}$ zugehören. Lassen wir nun den vorletzten Strahl die Reihe $O_{n-1}O, b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1} \ldots$ durchlaufen, so müssen die zugehörigen Strahlen des letzten Büschels für die beiden gegebenen Darstellungen die projectivischen Strahlbüschel

$$a_n' b_n' c_n' d_n' \ldots \barwedge a_n'' b_n'' c_n'' d_n'' \ldots$$

beschreiben, welche wir kennen; die zu ihnen projectivische und ihrer Schaar angehörige Reihe

$$O_n O, b_n, c_n, d_n, \ldots$$

liefert uns alsdann unendlich viele Sätze

$$O_1 O, \ldots O_{n-2} O, O_{n-1} O, O_n O \;;\; O_1 O, \ldots O_{n-2} O, b_{n-1}, b_n \;;$$
$$O_1 O, \ldots O_{n-2} O, c_{n-1}, c_n ; \ldots,$$

die alle der gesuchten Darstellung angehören. Die Strahlen a_n, b_n, c_n aber finden sich durch eine lineare Construction. Man schneide die drei Büschel durch eine der Einfachheit wegen reelle Gerade l in den Reihen

$$A_n' B_n' C_n', \ldots \barwedge A_n'' B_n'' C_n'' \ldots \barwedge A_n B_n C_n \ldots$$

A_n als der Schnittpunkt von OO_n und l ist gegeben. Durch die Strahlbüschel

$$\mathfrak{A}_0'(A_n' B_n' C_n' \ldots) \barwedge \mathfrak{A}_0''(A_n'' B_n'' C_n'')$$

erzeuge man nun einen Kegelschnitt $\mathfrak{ABCD} \ldots$ Jeder einzelne Punkt ergiebt sich im Falle der Imaginareität durch eine lineare Construction, wenn $\mathfrak{A}_0'$ und $\mathfrak{A}_0''$ reell sind. Denn von A_n' und A_n'' kennen wir jedenfalls Darstellungen, die zu dem Normalwurf projectivisch sind und von irgend zwei festen Strahlen $\mathfrak{A}_0'M$ und $\mathfrak{A}_0''N$ ausgehen. Hieraus findet man aber l i n e a r diejenigen zum Normalwurf projectivischen Darstel-

lungen, die von $\mathfrak{A}_0'\mathfrak{A}_0''$ resp. $\mathfrak{A}_0''\mathfrak{A}_0'$ ausgehen, hieraus endlich den Punkt $\mathfrak{A}$ in einer zum Normalwurf projectivischen Darstellung. Analoges gilt für $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots$ Nunmehr ziehen wir die Gerade $A_n\mathfrak{A}$, was ebenfalls linear angeht, weil A_n zu dem Normalwurf projectivisch dargestellt ist. Man suche alsdann (linear) den zweiten Schnittpunkt $\mathfrak{A}_0$ derselben mit dem Kegelschnitt. Das Büschel $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\ldots)$ projicirt nun die Reihe $A_nB_n C_n\ldots$; von O_n aus wird dieselbe in $a_n b_n c_n \ldots$ projicirt. Hält man jetzt $O_1O, O_2O, \ldots O_{n-3}O$ und b_n fest, und läſst man den von O_{n-1} ausgehenden Strahl das Büschel $a_{n-1}b_{n-1}c_{n-1}d_{n-1}\ldots$ durchlaufen, so gehören ihm in den drei Darstellungen die projectivischen Büschel

$$a_{n-2}', b_{n-2}', c_{n-2}', d_{n-2}', \ldots \barwedge a_{n-2}'', b_{n-2}'', c_{n-2}'', d_{n-2}'', \ldots \barwedge$$
$$O_{n-2}O, b_{n-2}, c_{n-2}, d_{n-2}, \ldots$$

zu, von denen die beiden ersten nach der Voraussetzung gegeben, das dritte aber nach dem so eben gelehrten Verfahren linear zu construiren ist. So erhält man zu den Strahlen $O_1O, \ldots O_{n-3}O, c_{n-1}, b_n$ den bestimmten linear zugehörigen d_{n-2}. Endlich erhält man durch Fortsetzung dieses Verfahrens linear den Strahl a_1, der für die betrachtete Curve den willkürlich gewählten Strahlen $b_2, c_3, d_4, \ldots$ entspricht, die von $O_2, O_3, O_4, \ldots$ ausgehen[41].

§ 177. Haben alle Curven K^n zweier Büschel die Grundpunkte $O_1, O_2, O_3, \ldots O_n$ mit einander gemeinsam, und gehört beiden Büscheln eine Curve gleichzeitig an, so kann man die lineare Darstellung der letzteren unter alleiniger Benutzung des Lineals finden, wofern in jedem Büschel zwei Curven bereits linear dargestellt sind.

Haben alle Curven $n$ter Ordnung eines Netzes νter Stufe die Punkte $O_1, O_2, \ldots O_n$ mit einander gemein, ist in demselben ein beliebiges Netz $(\nu-1)$ter Stufe gegeben und ein einzelnes Büschel, dessen Curven alle durch $B_1, B_2, \ldots B_{\nu-1}$ gehen, so kann man allein mit Hülfe des Lineals die Darstellung der Curve finden, welche dem Büschel mit dem Netze gemeinsam ist, wofern lineare Darstellungen von ν Curven des Netzes bekannt sind.

Ist im ersten Falle noch ein Grundpunkt B_1 oder B_2 des einen oder des anderen Büschels bekannt, so ist die Aufgabe ohne weiteres gelöst, denn man braucht nur die Darstellung der Curve aufsuchen, die je

in dem anderen Büschel durch B_1 oder B_2 bestimmt wird. Im anderen Falle aber benutzt man, dafs in jeder linearen Darstellung den $n-1$ Strahlen $O_n O_1, O_n O_2, \dots O_n O_{n-1}$ die Tangente der betreffenden Curve in O_n zugehören mufs. Die betrachtete Curve mufs daher sicherlich in beiden Büscheln so dargestellt sein, dafs dieser besonderen Gruppe derselbe Strahl aus der Reihe $a_n b_n c_n d_n \dots$ zugehört. In allen diesen Darstellungen von Curven des ersten Büschels entsprechen der Gruppe $O_{n-1} O_1$, $O_{n-1} O_2, \dots O_{n-1} O_{n-2}, O_{n-1} O_n$ die Strahlen eines Büschels, das zu dem vorigen projectivisch ist:

1) $$a_{n-1} b_{n-1} c_{n-1} d_{n-1} e_{n-1} \dots (\overline{\wedge}\ a_n b_n c_n d_n e_n \dots)$$

Aber auch in den Darstellungen der Curven des zweiten Büschels müssen dieser Zusammenstellung, damit die den Tangenten $a_n, b_n, c_n, d_n, \dots$ entsprechenden Curven desselben entstehen, die Strahlen eines projectivischen Büschels

2) $$a'_{n-1} b'_{n-1} c'_{n-1} d'_{n-1} e'_{n-1} \dots (\overline{\wedge}\ a_n b_n c_n d_n e_n \dots)$$

zugeordnet werden. 1) und 2) haben im Allgemeinen zwei gemeinsame Strahlen, deren einer die Tangente in O_{n-1} ist und der früheren in O_n projectivisch entspricht. Um ihn auszusondern, machen wir dieselbe Überlegung mit Vertauschung von $n-2$ gegen $n-1$. Wir erhalten dann zwei zu jenen projectivische Strahlbüschel

3) $$a_{n-2} b_{n-2} c_{n-2} d_{n-2} \dots \overline{\wedge}\ 4)\ a'_{n-2} b'_{n-2} c'_{n-2} d'_{n-2} \dots;$$

ein Coincidenzstrahl derselben ist die Tangente der gesuchten Curve in O_{n-2}. Ihm entspricht nach seiner Bedeutung die Tangente in O_{n-1} in den beiden Büscheln 1) und 2); dem zweiten Coincidenzstrahl von 3) und 4) aber entsprechen in den Büscheln 1) und 2) zwei von einander verschiedene Strahlen. Der andere Coincidenzstrahl wird also zu dem zweiten der Büschel 1) und 2) nicht homolog sein.

Man beziehe nun die Büschel 1) und 3) auf das Hülfsbüschel $p_1 p_2 p_3 \dots$ projectivisch. Den Strahlbüscheln 2) und 4) gehören dabei zwei unter sich und zu jenem projectivische Büschel $p'_1 p'_2 p'_3 \dots$ und $p''_1 p''_2 p''_3 \dots$ zu. Alle drei haben einen Coincidenzstrahl gemeinsam, während die beiden anderen Coincidenzstrahlen zwischen $p_1 p_2 p_3 \dots$ und $p'_1 p'_2 p'_3 \dots$, resp. zwischen $p_1 p_2 p_3 \dots$ und $p''_1 p''_2 p''_3 \dots$, von einander verschieden sind. Nach dem bekannten Steiner'schen Verfahren kann man

linear zwei Geraden herstellen, die auf einem beliebigen durch O gelegten Kegelschnitt die zweiten Schnittpunkte der gesuchten Coincidenzstrahlenpaare ausschneiden. Beide müssen einander in dem Schnittpunkt des gemeinsamen Coincidenzstrahls mit dem Kegelschnitt treffen; eben deswegen läſst sich dieser linear auffinden. Ihm entsprechen in den beiden Büscheln in O_{n-1} und O_{n-2} die beiden Tangenten der gesuchten Curve. Aus den beiden gegebenen Schaaren linearer Systeme erhält man nunmehr im Allgemeinen zwei verschiedene lineare Darstellungen der Curven. Beiden sind die Strahlengruppen gemeinsam, die nach Curvenpunkten führen.

Um nun die zweite Aufgabe zu lösen, denken wir uns irgend ν von einander unabhängige Curven $K_1, K_2, K_3, \dots K_\nu$ des Netzes $(\nu-1)$ter Stufe hergestellt. Es seien alsdann $K_1', K_2', K_3', \dots K_{\nu-1}'$ Curven $n$ter Ordnung der Büschel $K_1, K_\nu; K_2, K_\nu; K_3, K_\nu; \dots K_{\nu-1}, K_\nu$, die alle durch B_1 hindurchgehen; sie bilden ein Netz $(\nu-2)$ter Stufe, in dem die gesuchte Curve liegt. Es seien ferner $K_1'', K_2'', \dots K_{\nu-2}''$ die durch B_2 bestimmten Curven der Büschel $K_1', K_{\nu-1}'; K_2', K_{\nu-2}'; K_3', K_{\nu-1}'; \dots K_{\nu-2}', K_{\nu-1}'$. Sie bilden ein Netz $(\nu-3)$ter Stufe, dem die gesuchte Curve angehört und enthalten alle die Punkte B_1 und B_2. Hat man in dieser Art allgemein μ Curven $K_1^{(\mu)}, K_2^{(\mu)}, K_3^{(\mu)}, \dots K_{\nu-\mu}^{(\mu)}$ des Netzes $(\nu-1)$ter Stufe hergestellt, welche $B_1, B_2, \dots B_\mu$ enthalten und ein Netz $(\nu-\mu-1)$ter Stufe bilden, das die gesuchte Curve enthält, so bilden die Curven $K_1^{(\mu+1)}, K_2^{(\mu+1)}, K_3^{(\mu+1)}, \dots K_{\nu-\mu-1}^{(\mu+1)}$ der Büschel $K_1^{(\mu)}, K_{\nu-\mu}^{(\mu)}; K_2^{(\mu)}, K_{\nu-\mu}^{(\mu)}; K_3^{(\mu)}, K_{\nu-\mu}^{(\mu)}; \dots K_{\nu-\mu-1}^{(\mu)}, K_{\nu-\mu}^{(\mu)}$, welche $B_{\mu+1}$ enthalten, ein Netz $(\nu-\mu-2)$ter Stufe, dem die gesuchte Curve angehört. So kommt man endlich auf ein Büschel $K_1^{(\nu-2)} K_2^{(\nu-2)}$, welches mit dem gegebenen die gesuchte Curve gemeinsam hat. Während nun die linearen Darstellungen, aus denen $K_1^{(\nu-2)}$ und $K_2^{(\nu-2)}$ entstehen, aus der vielfachen Anwendung des Satzes vom § 176 hervorgehen, sucht man diejenige der zu betrachtenden Curve nach der Methode, welche in dem ersten Theile des jetzigen § auseinander gesetzt wurde.

§ 178. Es seien $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ Punkte $[O, A_1, A_2, \dots A_{2n+1}, B_1, B_2, \dots B_{\frac{1}{2}n(n+1)}]$ in einer reellen Ebene gegeben mit der Bestimmung, durch dieselben eine Curve $(n+1)$ter Ordnung hindurchzulegen.

Man kennzeichne durch $[X_1 X_2 \dots X_{n-1}]$ ein Büschel von Curven K^n, welches aufser durch die Grundpunkte $B_1, B_2, \dots B_{\frac{1}{2}n(n+1)}$ noch durch die in Klammern gesetzten $n-1$ anderen Punkte bestimmt wird, ferner bezeichne man mit $a_1, a_2, \dots a_{2n+1}$ die Strahlen $OA_1, OA_2, OA_3, \dots OA_{2n+1}$, mit a einen beliebigen Strahl des Büschels O.

Die zu lösende Aufgabe ist dann $X_1, X_2, \dots X_{n-1}$ der projectivischen Beziehung

$$a_1 a_2 \dots a_{2n+1} \overline{\wedge} [X_1 X_2 \dots X_{n-1}](A_1 A_2 \dots A_{2n+1})$$

gemäfs zu bestimmen[42].

Man setze

$$\begin{array}{l}
[A_2 A_3 \dots A_n](A_1, \overset{1}{}_{n+\varrho}, A_{2n+1}, A_{n+\varrho}) \overline{\wedge} (a_1, a, a_{2n+1}, a_{n+\varrho}) \\
[A_3 A_4 \dots A_1](A_2, \overset{2}{}_{n+\varrho}, A_{2n+1}, A_{n+\varrho}) \overline{\wedge} (a_2, a, a_{2n+1}, a_{n+\varrho}) \\
[A_4 A_5 \dots A_2](A_3, \overset{3}{}_{n+\varrho}, A_{2n+1}, A_{n+\varrho}) \overline{\wedge} (a_3, a, a_{2n+1}, a_{n+\varrho}) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
[A_1 A_2 \dots A_{n-1}](A_n, \overset{n}{}_{n+\varrho}, A_{2n+\varrho}, A_{n+\varrho}) \overline{\wedge} (a_n, a, a_{2n+1}, a_{n+\varrho})
\end{array}$$

$$\varrho = 1, 2, 3, \dots n.$$

Dem Strahle a gehört dann diejenige Curve K zu, welche den n Netzen $(n-1)$ter Stufe

1) $[A_2 A_3 \dots A_n]^1_{n+1}, [A_3 A_4 \dots A_n]^2_{n+1}, \dots [A_1 A_2 \dots A_{n-1}]^n_{n+1}$
2) $[A_2 A_3 \dots A_n]^1_{n+2}, [A_3 A_4 \dots A_1]^2_{n+2}, \dots [A_1 A_2 \dots A_{n-1}]^n_{n+2}$
. . . .
n) $[A_2 A_3 \dots A_n]^1_{2n}, [A_3 A_4 \dots A_n]^2_{2n}, \dots [A_1 A_2 \dots A_{n-1}]^n_{2n}$

gleichzeitig angehört. Von irgend einem Punkte X der Ebene kann man mit alleiniger Hülfe des Lineals entscheiden, ob er zur Curve gehört oder nicht, wofern alle gegebenen imaginären Punkte und Geraden gleich X projectivisch zu einem Normalwurf dargestellt sind.

Die gegebene Lösung des Problems setzt die analoge Aufgabe für Curven $n$ter Ordnung voraus. Aus dem $n$fachen Netz, welches die durch die Punkte $B_1 \dots B_{\frac{1}{2}n(n+1)}$ gehenden Curven $n$ter Ordnung noch bilden, werden durch Angabe von $2n+1$ verschiedenen Punkten ebenso viele verschiedene $(n-1)$fache Netze herausgehoben. Die Aufgabe ist nun, ein einzelnes Netz erster Stufe [ein Büschel] so zu legen, dafs die Reihe der Curven, die ihm mit den genannten Netzen gemeinsam sind, zu einer gegebenen Reihe von $2n+1$ Strahlen projectivisch ist. In dieser Fassung bezieht

sich das Problem auf alle geometrischen Netze, mögen sie aus gleichzahligen Anordnungen von Punkten (Involutionsnetz), aus Curven gleicher Ordnung, oder, was über den Rahmen dieser Arbeit hinausgeht, aus Flächen bestehen. Wir ersetzen der bequemeren Ausdrucksweise wegen diese allgemeine Netzaufgabe durch ihre reciproke, wo also $2n+1$ beliebige Glieder $G_1, G_2, \ldots G_{2n+1}$ des Netzes gegeben sind, dagegen ein Netz N $(n-2)$ter Stufe so zu suchen ist, daſs

$$N(G_1 G_2 \ldots G_{2n+1}) \;\overline{\wedge}\; a_1 a_2 \ldots a_{2n+1}$$

ist, wobei $a_1, a_2, \ldots a_{2n+1}$ Elemente eines einförmigen Gebildes sind. Man betrachte nun die Reihe $n$ten Ranges

$$G^{(1)} G_1 G_2 \ldots G_n G_{2n+1} G_{n+1} \;\overline{\wedge}\; a a_1 a_2 \ldots a_n a_{2n+1} a_{n+1}, \qquad 1)$$

wo $G^{(1)}$ durch a eindeutig bestimmt wird (§ 104). Jedes Netzbüschel, welches $G^{(1)}, G_1, G_2, \ldots G_n, G_{2n+1}$ mit irgend $n-1$ festen Gliedern der Reihe 1) verbindet, ist zu $a a_1 a_2 \ldots a_n a_{2n+1}$ projectivisch. Umgekehrt muſs jeder Träger $(n-2)$ter Stufe der genannten Art die Reihe $n$ten Ranges in $n-1$ Gliedern treffen.

Jetzt betrachten wir neben 1) noch die $n-1$ anderen Reihen $n$ten Ranges

$$\left.\begin{array}{lcl} G^{(2)} G_1 G_2 \ldots G_n G_{2n+1} G_{n+2} & \overline{\wedge} & a a_1 a_2 \ldots a_n a_{2n+1} a_{n+2} \\ G^{(3)} G_1 G_2 \ldots G_n G_{2n+1} G_{n+3} & \overline{\wedge} & a a_1 a_2 \ldots a_n a_{2n+1} a_{n+3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ G^{(n)} G_1 G_2 \ldots G_n G_{2n+1} G_{2n} & \overline{\wedge} & a a_1 a_2 \ldots a_n a_{2n+1} a_{2n} \end{array}\right\} \quad 2)$$

Im allgemeinen Falle können keine zwei dieser n Reihen identisch sein. Daher ist durch $G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)}, \ldots G^{(n)}$ ein bestimmtes Netz $(n-1)$ter Stufe bestimmt, das auſser in $G^{(1)}$ noch in $n-1$ anderen Gliedern der Reihe $n$ten Ranges 1) begegnet. Von dem sie verbindenden Netze N $(n-2)$-ter Stufe aus wird $G^{(1)} G_1 G_2 \ldots G_n G_{2n+1}$ durch ein zu $a a_1 a_2 \ldots a_n a_{2n+1}$ projectivisches Büschel projicirt. Nun kann aber nach der besonderen Natur von N $G^{(1)}$ mit $G^{(2)}, G^{(3)}, G^{(4)}, \ldots G^{(n)}$ vertauscht werden; deſshalb muſs N alle Reihen $n$ten Ranges in je $n-1$ Gliedern treffen. Von hier aus werden daher alle in den Reihen 2) links stehenden Gruppirungen durch Büschel projicirt, die zu den Reihen rechts projectivisch sind; man hat also

$N(G^{(\lambda)} G_1 G_2 G_3 \dots G_n G_{n+1} \dots G_{2n} G_{2n+1}) \;\overline{\wedge}\; a a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \dots a_{2n} a_{2n+1}$.

Nun beachte man die Bestimmung von $G^{(\lambda)}$, welche offenbar ganz allgemein so vor sich geht, wie sie an dem speciellen Fall der Involution μten Ranges im § 104 gelehrt wird, so dafs man also $G^{(\lambda)}$ aus den Beziehungen

$$[G_2 G_3 \dots G_n](G_1 G_{2n+1} G_{n+\lambda} G^{(\lambda)}) \;\overline{\wedge}\; (a_1 a_{2n+1} a_{n+\lambda} a)$$
$$[G_3 \dots G_n G_1](G_2 G_{2n+1} G_{n+\lambda} G^{(\lambda)}) \;\overline{\wedge}\; (a_2 a_{2n+1} a_{n+\lambda} a)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$[G_1 G_2 \dots G_{n-1}](G_n G_{2n+1} G_{n+\lambda} G^{(\lambda)}) \;\overline{\wedge}\; (a_n a_{2n+1} a_{n+\lambda} a)$$

erhält. Geht man nun wieder zu dem Curvennetz zurück, so entsprechen den Gliedern $G_1, G_2, G_3, \dots$ je die durch $A_1, A_2, A_3, \dots$ bestimmten Netze $(n-1)$ter Stufe, dem Netze $G_2 G_3 \dots G_n$ das Curvenbüschel $[A_2 A_3 \dots A_n]$, dem Netze $(n-1)$ter Stufe $G_2 G_3 \dots G_n G^{(1)}$ die Curve $[A_2 A_3 A_4 \dots]^1_{n+1}$ und der Gruppe $G^{(1)}$ das die n Curven

3) $$[A_2 A_3 \dots A_n]^1_{n+1}, [A_3 A_4 \dots A_1]^2_{n+1}, \dots [A_1 A_2 \dots A_{n-2}]^n_{n+1}$$

umfassende Netz $(n-1)$ter Stufe; dem Netze $(n-1)$ter Stufe $G^{(1)} G^{(2)} \dots G^{(n)}$ entspricht, wie wir es behaupteten, die Curve, welche dem Netze 3) mit den $n-1$ anderen

4) $$\begin{cases} [A_2 A_3 \dots A_n]^1_{n+2}, [A_3 A_4 \dots A_1]^2_{n+2}, \dots [A_1 A_2 \dots A_{n-1}]^n_{n+2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [A_2 A_3 \dots A_n]^1_{2n}, [A_3 A_4 \dots A_1]^2_{2n} \dots [A_1 A_2 \dots A_{n-1}]^n_{2n} \end{cases}$$

gemeinsam ist. Die Darstellungen, welche von irgend n der Punkte B aus allen diesen Curven zukommen, mögen sich linear auffinden lassen, wie überhaupt diejenige einer durch $\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2}$ Punkte bestimmten Curve K^n. Wir wollen dann zeigen, dafs auch die lineare Darstellung der Curve $(n+1)$ter Ordnung sich mit alleiniger Benutzung des Lineals auffinden läfst.

Mit dem ersten Netze $(n-1)$ter Stufe

$$[A_2 A_3 \dots A_n]^1_{n+1} [A_3 A_4 \dots A_n A_1]^2_{n+1} \dots [A_1 A_2 \dots A_{n-1}]^n_{n+1}$$

hat irgend ein anderes

$$[A_2 A_3 \dots A_n]^1_{n+\lambda} [A_3 A_4 \dots A_n A_1]^2_{n+\lambda} \dots [A_1 A_2 \dots A_{n-1}]^n_{n+\lambda}$$

ein Netz $(n-2)$ter Stufe gemeinschaftlich. Dasselbe kann durch die $n-1$ Curven

$$[A_3 A_4 \dots A_n]^2_{n+\lambda,n+1};\ [A_4 \dots A_n A_2]^3_{n+\lambda,n+1};\ \dots\ [A_2 A_3 \dots A_{n-1}]^n_{n+\lambda,n+1}$$

des ersten Netzes bestimmt werden, die zugleich den Büscheln

$$[A_2 A_3 \dots A_n]^1_{n+\lambda},\ [A_3 A_4 \dots A_n A_1]^2_{n+\lambda};\ [A_2 A_3 \dots A_n]^1_{n+\lambda},\ [A_4 A_5 \dots A_1 A_2]^3_{n+\lambda};\ \dots$$
$$[A_2 A_3 \dots A_n]^1_{n+\lambda},\ [A_1 A_2 \dots A_{n-1}]^n_{n+\lambda}$$

angehören. Ihre Darstellungen kann man (§ 177) mit alleiniger Hülfe des Lineals auffinden. Das Problem ist also darauf zurückführbar, die Curve aufzufinden, welche $n-1$ in einem Netze $(n-1)$ter Stufe gelegenen Netzen $(n-2)$ter Stufe gemeinsam ist. Ähnlich bestimmt man in dem ersten derselben $n-2$ Netze $(n-3)$ter Stufe, denen ebenfalls die gesuchte Curve gemeinschaftlich ist. Schliefslich erhält man die linearen Darstellungen von zwei Büscheln, denen die a entsprechende K^n gleichzeitig angehört; hieraus kann man aber ihre lineare Darstellung ableiten.

The intersections of such curves give us [illegible]

Fünftes Capitel. §§ 179–196.

Analytische Erläuterungen zu den vorstehenden geometrischen Entwickelungen.

§ 179. Von Staudt identificirt, wie wir gesehen hatten, zwei conjungirt imaginäre Punkte oder Strahlen mit einer gegebenen elliptischen Punkt- oder Strahleninvolution. Die Trennung eines Paares wird durch Betrachtung des Sinnes bewirkt. Auf einer Geraden liegen die Punkte, deren Darstellungen, was Involution und Sinn anbetrifft, zu ihrer eigenen Darstellung perspectivisch sind.

Auch die imaginäre Gerade im analytischen Sinne kann als Ordnungslinie einer elliptischen Involution betrachtet werden. Wenn

1) $p \equiv \alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)=0$ und $q \equiv \alpha_1(x-x_1)+\beta_1(y-y_1)=0$

die Gleichungen reeller Geraden sind, so ist

2) $$p+iq=0$$

die allgemeinste Gleichung einer imaginären Geraden, die nur den reellen Punkt x_1, y_1 enthält. Dieselbe ist der eine imaginäre Doppelstrahl der Involution

3) $$p^2-q^2+2\lambda pq=0.$$

Da jede elliptische Involution nur eine Darstellung in der Form 3) zuläſst, so kann man sie geradezu als Vertreterin der beiden Strahlen $p+iq=0$ und $p-iq=0$ auffassen. Für den Schnittpunkt von $p+iq=0$ mit einer reellen Geraden mit der Gleichung

4) $$\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2=0$$

erhält man die Coordinaten, indem man zwischen den Gleichungen 2) und 4) zuerst x und dann y eliminirt. Andererseits ist natürlich der betreffende Schnittpunkt ein Doppelelement der Involution, welche durch die Strahlen-

involution 3) auf der Geraden 4) bestimmt wird. Hieraus sieht man, dafs irgend zwei conjungirte Strahlen von Staudt's mit zwei imaginären Strahlen $p+iq=0$ und $p-iq=0$, irgend zwei conjungirte Punkte auch mit zwei imaginären Punkten im analytischen Sinne identisch sein müssen. Alle imaginären Punkte, die im synthetischen Sinne auf zwei conjungirten Geraden liegen, gehören auch zwei bestimmten imaginären Geraden im analytischen Sinne an. Es fragt sich nur, ob das analytische Trennungsprincip mit dem synthetischen in Übereinstimmung gebracht werden kann[43].

Um dies zu erweisen, setzen wir zunächst die imaginären Punkte, die auf den beiden Axen im analytischen Sinne liegen, in Verbindung mit synthetisch definirten imaginären Punkten. Der Punkt $x=a+bi$ der x Axe kann als der eine Doppelpunkt der Involution

$$(x-a)^2-b^2+2\lambda b(x-a)=0 \qquad 5)$$

aufgefafst werden. Jede elliptische Involution kann in nur einer Weise in dieser Form dargestellt werden, denn a ist die Coordinate des Mittelpunktes der Involution, der mit dem unendlich fernen Punkte der x Axe ein Paar bildet, und das Paar $x=a+b$, $x=a-b$ ist das einzige, dessen Abstand durch den Mittelpunkt halbirt wird. Wir setzen nun identisch den Punkt mit der Darstellung

$$a-b\,,\,a\,,\,a+b\,,\,\infty \text{ und den Punkt } x=a+bi\,,\,y=0\,. \qquad 6)$$

Ist also der Factor b von i positiv, so besitzt auch die Darstellung des Punktes $a+bi$ einen bestimmten Sinn, den wir als positiv bezeichnen wollen. Ist andererseits b negativ, so ist die Darstellung im negativen Sinne beschrieben. Die ähnliche Festsetzung treffen wir für die y Axe. Wir betrachten als identisch den Punkt mit der Darstellung

$$c-d\,,\,c\,,\,c+d\,,\,\infty \text{ und den Punkt } y=c+di\,,\,x=0\,. \qquad 7)$$

So lange d positiv bleibt, ist auch der Sinn der Darstellung positiv; wird d negativ, so ändert sich derselbe und wird negativ.

Jede imaginäre Gerade kann als die Verbindungslinie zweier Punkte betrachtet werden, von denen der eine der x Axe, der andere der y Axe angehört. Jeder analytisch definirten imaginären Geraden gehört so eine bestimmte synthetisch definirte imaginäre Gerade zu, zu der die zugehörigen Darstellungen perspectivisch sind. Wir werden beide als identisch

betrachten können, wenn der eine reelle Punkt der ersteren zugleich der einzige reelle Punkt der letzteren Geraden ist. Der letztere ist aber einer von den beiden Punkten, von denen aus die Involutionen der beiden imaginären Punkte in einander projicirt werden. Der reelle Punkt der synthetisch definirten Geraden liegt im zweiten oder vierten Quadranten, falls die beiden Darstellungen von gleichem Sinne sind, dagegen im ersten oder dritten Quadranten, wenn die Darstellungen der Punkte von verschiedenem Sinne sind. Auch von dem reellen Punkte der analytischen Geraden aus werden die Involutionen der imaginären Punkte in einander projicirt. Kann man noch zeigen, dafs das Verhältnifs $\frac{x_1}{y_1}$ seiner Coordinaten ein entgegengesetztes Zeichen besitzt, wie das Verhältnifs $\frac{b}{d}$ der imaginären Bestandtheile in den Coordinaten der Punkte, welche die Gerade auf der x und y Axe ausschneidet, so ist die Identität der beiden reellen Punkte nachgewiesen.

Die Gleichung der Verbindungslinie sei nun

$$8)\quad \alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)+i\{\alpha_1(x-x_1)+\beta_1(y-y_1)\}=0\,.$$

Hieraus erhält man für $y=0$ die Coordinate des Schnittpunktes mit der x Axe

$$9)\quad \begin{aligned} a+bi &= \frac{\alpha x_1+\beta y_1+i(\alpha_1 x_1+\beta_1 y_1)}{\alpha+i\alpha_1} \\ &= \frac{(\alpha^2+\alpha_1^2)x_1+(\alpha\beta+\alpha_1\beta_1)y_1}{\alpha^2+\alpha_1^2}+i\,\frac{(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)y_1}{\alpha^2+\alpha_1^2}, \end{aligned}$$

und für $x=0$

$$10)\quad \begin{aligned} c+di &= \frac{\alpha x_1+\beta y_1+i(\alpha_1 x_1+\beta_1 y_1)}{\beta+i\beta_1} \\ &= \frac{(\beta^2+\beta_1^2)y_1+(\alpha\beta+\alpha_1\beta_1)x_1}{\beta^2+\beta_1^2}+i\,\frac{(\beta\alpha_1-\alpha\beta_1)x_1}{\beta^2+\beta_1^2}. \end{aligned}$$

Es ergiebt sich folglich

$$11)\quad \frac{b}{d}=-\frac{y_1}{x_1}\,\frac{\beta^2+\beta_1^2}{\alpha^2+\alpha_1^2},$$

und es sind wirklich die beiden Verhältnisse $\frac{b}{d}$ und $\frac{x_1}{y_1}$ immer von verschiedenen Zeichen. Mithin kann die Verbindungslinie der beiden Punkte

$$12)\quad x=a+bi,\, y=0 \text{ und } x=0\,, y=c+di$$

mit der Linie identisch gesetzt werden, welche durch die Punkte

$$a-b\,,\,a\,,\,a+b\,,\,\infty \quad \text{und} \quad c-d\,,\,c\,,\,c+d\,,\,\infty \tag{13}$$

bestimmt wird, denn beide Linien enthalten denselben reellen Punkt.

Jeden Punkt der Ebene kann man im analytischen Sinne als Centrum eines Strahlbüschels definiren; es mufs dann gezeigt werden, dafs alle diese Strahlen auch im synthetischen Sinne in einem Punkte sich treffen. Der Schnittpunkt zwischen irgend zwei imaginären Strahlen ist nun nach analytischer und nach synthetischer Anschauung in je einer gewissen reellen Geraden gelegen. Stellen sich diese beiden reellen Geraden als mit einander identisch heraus, so wird man auch die Schnittpunkte als identisch betrachten, welche die beiden Geraden nach analytischer oder synthetischer Betrachtungsweise gemeinsam haben. In beiden Fällen hat man nur die Wahl zwischen den beiden reellen Geraden c und c_1, auf denen die Involutionen der imaginären Geraden dieselbe Punktinvolution ausschneiden. Diese beiden Geraden werden durch die reellen Punkte A_1 und A_2 der imaginären Strahlen getrennt; vom synthetischen Standpunkte aus mufs die Gerade c die endliche Strecke A_1A_2 treffen, wenn die Darstellungen der Geraden in verschiedenem Sinne beschrieben sind, im anderen Falle kommt die Gerade in Betracht, welche die unendlich grofse Strecke A_1A_1 trifft.

Die reelle Gerade, welche den imaginären Punkt

$$x = a+bi\ ,\ y = c+di \tag{14}$$

enthält, kann offenbar durch die beiden Gleichungen

$$x = a+b\lambda\ ,\ y = c+d\lambda \tag{15}$$

dargestellt werden. Es seien nun x_1, y_1 die Coordinaten von A_1, x_2, y_2 diejenigen von A_2; alsdann sind

$$(x_1-a-bi)(y-y_1) - (y_1-c-di)(x-x_1) = 0 \tag{16}$$

und

$$(x_2-a-bi)(y-y_2) - (y_2-c-di)(x-x_2) = 0 \tag{17}$$

die Gleichungen von zwei Geraden, die A_1 resp. A_2 enthalten und in dem imaginären Punkte 14) sich treffen. Für den Schnittpunkt zwischen A_1A_2 und zwischen dem reellen Träger 15) des Punktes 14) müssen die beiden Gleichungen

$$a+b\lambda = x_1+\mu(x_2-x_1)\ ,\ c+d\lambda = y_1+\mu(y_2-y_1)$$

bestehen, woraus sich ergiebt

18) $$\mu = \frac{d(a-x_1)-b(c-y_1)}{d(x_2-x_1)-b(y_2-y_1)} .$$

Der Schnittpunkt liegt innerhalb der endlichen Strecke $A_1 A_2$, wenn

19) $$0 < \mu < 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\mu}{1-\mu} > 0$$

ist. Nun hat man aber offenbar

20) $$\frac{\mu}{1-\mu} = -\frac{d(a-x_1)-b(c-y_1)}{d(a-x_2)-b(c-y_2)} .$$

Wenn man mit $e_1 + f_1 i$ den Schnittpunkt der Geraden 16) mit der x Axe bezeichnet, so ist (9)

21) $$\begin{aligned} f_1 &= y_1 \frac{(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)}{\alpha^2+\alpha_1^2} \\ &= y_1 \frac{d(a-x_1)-b(c-y_1)}{(y_1-c)^2+d^2}; \end{aligned}$$

mit Vertauschung der Indices 1 und 2 bekommt man

22) $$f_2 = y_2 \frac{d(a-x_2)-b(c-y_2)}{(y_2-c)^2+d^2} .$$

Mithin ergiebt sich

23) $$\frac{f_1}{f_2} \cdot \frac{y_2}{y_1} = \frac{d(a-x_1)-b(c-y_1)}{d(a-x_2)-b(c-y_2)} \cdot \frac{(y_2-c)^2+d^2}{(y_1-c)^2+d^2} .$$

$\frac{\mu}{1-\mu}$ ist also dann und nur dann positiv, wenn

24) $$\frac{f_1 y_2}{f_2 y_1} < 0$$

ist. Eine der Gröfsen $\frac{f_1}{y_1}$ und $\frac{f_2}{y_2}$ mufs mithin in diesem Falle positiv, die andere negativ sein.

Der Richtungssinn eines Punktes der x Axe bestimmt an allen Punkten mit positiver Ordinate einen und denselben Drehungssinn, an allen Punkten mit negativer Ordinate aber den entgegengesetzten Drehungssinn. Umgekehrt bestimmen an einem festen Punkte mit den Coordinaten x_1, y_1 alle imaginären Punkte der x Axe mit positivem Sinne ihrer Darstellung oder positivem Factor f_1 von i in ihrer x Coordinate denselben Drehungssinn. Der Drehungssinn, welcher sich im synthetischen Sinne mit der Geraden $A_1 \mathrm{A}$ verbindet, ändert sich also nur mit dem Quotienten $\frac{f_1}{y_1}$. Die

Gerade 15) wird die endliche Strecke A_1A_2 mithin dann schneiden, wenn die synthetischen Darstellungen der beiden imaginären Geraden im verschiedenen Sinne beschrieben sind. Der Schnittpunkt der beiden analytisch dargestellten Geraden kann immer mit demjenigen der synthetisch dargestellten Geraden als identisch betrachtet werden. Alle Geraden, die im analytischen Sinne durch einen Punkt gehen, haben auch im synthetischen Sinne einen Punkt gemeinsam.

Ist nun in dieser Weise die Identität zwischen den analytisch und synthetisch definirten imaginären Gröfsen einmal aufgezeigt, so folgt sofort, dafs auch die beiden Auffassungen der projectivischen Beziehung in genauestem Zusammenhange stehen. Man kann die Elemente eines einförmigen Gebildes analytisch durch den Zahlenwerth des Theilverhältnisses fixiren, den dieselben an zwei festen Elementen des Trägers bestimmen. Besteht nun zwischen zwei einförmigen Gebilden die projectivische Beziehung, so verschwindet eine bilineare Form

$$a\lambda + b\lambda + c\lambda\lambda_1 + d$$

für je zwei entsprechende Theilverhältnisse. Eine solche Beziehung findet auch zwischen dem ersten und dem letzten Gliede einer Reihe perspectivischer Gebilde statt.

Ein sehr einfacher Zusammenhang besteht zwischen dem Repräsentanten $x = a, y = b$ des imaginären Punktes $a + bi$ der x Axe und seiner geometrischen Darstellung

$$a - b, a, a + b, \infty.$$

Auf seinen Verbindungslinien mit den beiden Kreispunkten liegen zwei symmetrisch zur x Axe gelegene reelle Punkte. Sie lassen sich mit jedem Paare der Involution durch einen Kreis verbinden, der also seinen Mittelpunkt auf der x Axe hat. Für das Paar $x = a, x = \infty$ besteht dieser Kreis aus der unendlich fernen Geraden und dem Lothe in a, für das zweite Paar $x = a - b, x = a + b$ hat der Kreis einen Radius von der Länge b und den Punkt $x = a$ zum Mittelpunkt. Der Punkt $x = a$, $y = b$ liegt mithin in der imaginären Geraden, die mit einem bestimmten Kreispunkt den gegebenen imaginären Punkt verbindet[44].

Das zweite Capitel der vorstehenden Arbeit. §§ 180—187.

§ 180. Vom analytischen Standpunkte aus wird eine Involution durch zwei gegebene Gruppen desselben Trägers zu n Elementen bestimmt. Haben diese $2n$ Elemente die Theilverhältnisse $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ hinsichtlich zweier gegebener Elemente, so sind die Theilverhältnisse aller Elemente irgend einer dritten Gruppe Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades

$$1)\quad \begin{aligned}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) - \lambda(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n)\\ \equiv f_n(x)-\lambda g_n(x) = 0\,,\end{aligned}$$

so dafs zu jedem Werthe von λ eine Gruppe der Involution gehört. Wird der Fundamentalsatz der Algebra vorausgesetzt, so enthält jede Gruppe n im Allgemeinen getrennte Elemente. Zwei verschiedene Involutionen

$$2\text{a})\quad f_n(x)-\lambda g_n(x) = 0\,,\quad 2\text{b})\ f_m(x)-\lambda_1 f_m(x) = 0$$

werden als projectivisch bezeichnet, wenn für λ und λ_1 die allgemeinste bilineare Gleichung besteht

$$3\text{a})\quad a\lambda + b\lambda_1 + c\lambda\lambda_1 + d = 0\,.$$

Entsprechen sich die Gruppen $f_n(x) = 0$ und $f_m(x) = 0$, sowie $g_n(x) = 0$ und $g_m(x) = 0$, so besteht die einfachere Gleichung

$$3\text{b})\quad \lambda_1 = c\,.\,\lambda\,.$$

Es seien nun $C_1 C_2 \dots C_n$ und $D_1 D_2 \dots D_n$ irgend zwei neue Gruppen der Involution, so dafs man also hat

$$4)\quad \begin{aligned}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) - \gamma(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n)\\ = (1-\gamma)(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\dots(x-\gamma_n) = 0\,.\end{aligned}$$

$$5)\quad \begin{aligned}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) - \delta(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n)\\ = (1-\delta)(x-\delta_1)(x-\delta_2)\dots(x-\delta_n) = 0\,.\end{aligned}$$

Hieraus fliefsen aber die weiteren Formeln ab

$$6)\quad \begin{aligned}\delta(1-\gamma)(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\dots(x-\gamma_n) - \gamma(1-\delta)(x-\delta_1)(x-\delta_2)\dots(x-\delta_n)\\ \equiv (\delta-\gamma)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)\,,\end{aligned}$$

$$(1-\gamma)(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\dots(x-\gamma_n)-(1-\delta)(x-\delta_1)(x-\delta_2)\dots(x-\delta_n) \quad 7)$$
$$\equiv(\delta-\gamma)(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n),$$

und schliefslich

$$(\delta-\gamma)\{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)-\lambda(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n)\} \quad 8)$$
$$\equiv(1-\gamma)(\delta-\lambda)(x-\gamma_1)\dots(x-\gamma_n)-(1-\delta)(\gamma-\lambda)(x-\delta_1)\dots(x-\delta_n)=0\,.$$

Die letztere Gleichung resultirt aber bei der Elimination von μ zwischen den beiden Beziehungen

$$(1-\gamma)(x-\gamma_1)\dots(x-\gamma_{n-m})-(1-\delta)\mu(x-\delta_1)\dots(x-\delta_{n-m})=0\,, \quad 9)$$

$$(\gamma-\lambda)(x-\delta_{n-m+1})\dots(x-\delta_n)-\mu(\delta-\lambda)(x-\gamma_{n-m+1})\dots(x-\gamma_n)=0\,. \quad 10)$$

Giebt man in diesen Gleichungen λ einen festen Werth, so hat man zwei projectivische Involutionen $(n-m)$ter und $m$ter Ordnung vor sich, und zwar entsprechen den Gruppen $C_1C_2\dots C_{n-m}$ und $D_1D_2\dots D_{n-m}$ der ersten Reihe die bestimmten Gruppen $D_{n-m+1}\dots D_n$ und $C_{n-m+1}\dots C_n$ der zweiten Involution. Jedes Element der λ entsprechenden Gruppe der Involution 1) gehört zwei homologen Gruppen der Reihen 9) und 10) gleichzeitig an. Andererseits betrachten wir einen festen Werth μ_1 von μ bei veränderlichem λ. Alsdann erhalten wir projectivische Involutionen

$$0=(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)-\lambda(x-\beta_1)\dots(x-\beta_n) \quad 1)$$
$$\equiv(1-\gamma)(\delta-\lambda)(x-\gamma_1)\dots(x-\gamma_n)-(1-\delta)(\gamma-\lambda)(x-\delta_1)\dots(x-\delta_n)$$

und

$$(\delta-\lambda)(x-\delta_{n-m+1})\dots(x-\delta_n)-\mu_1(\gamma-\lambda)(x-\gamma_{n-m+1})\dots(x-\gamma_n)=0 \quad 11)$$

die zweite Involution ergiebt für $\lambda=\lambda_1$ diejenige Gruppe, welche in dem λ_1 entsprechenden Reihenpaar 9) und 10) der festen Gruppe

$$(1-\gamma)(x-\gamma_1)\dots(x-\gamma_{n-m})-\mu_1(1-\delta)(x-\delta_1)\dots(x-\delta_{n-m})=0 \quad 12)$$

zugeordnet werden mufs, damit die zu λ_1 gehörende Gruppe von 1) entsteht. Die Reihe 11) ist also nach unserer Bezeichnung genau die charakteristische Reihe, die zu der Gruppe 12) gehört. Dem Werthe $\lambda=\gamma$ entspricht die Gruppe $C_1C_2\dots C_n$ in 1) und die Gruppe $C_{n-m+1}\dots C_n$ in der charakteristischen Reihe 11). Dem Werthe $\lambda=\delta$ entspricht die

Gruppe $D_1 D_2 \dots D_n$ in ersterer, und das Glied $D_{n-m+1} D_1 \dots D_n$ in letzterer Involution.

Zerlegt man also irgend zwei Gruppen $C_1 C_2 \dots C_n$ und $D_1 D_2 \dots D_n$ der gegebenen Involution in je zwei andere

$$C_1 C_2 \dots C_{n-m} \qquad C_{n-m+1} \dots C_n$$

und

$$D_1 D_2 \dots D_{n-m} \qquad D_{n-m+1} \dots D_n$$

zu $n-m$ und zu m Elementen, und bezieht man in allen möglichen Arten zwei Involutionen $(n-m)$ter und $n$ter Ordnung so, daſs die kreuzweis stehenden Glieder einander entsprechen, so erzeugen sie die Glieder der Involution $n$ter Ordnung. Ein einzelnes Glied kann durch die Gruppe zu m Punkten fixirt werden, die bei seiner Erzeugung einer festen Gruppe der Involution $(n-m)$ter Ordnung zugewiesen wird. Alle so entstehenden charakteristischen Reihen sind zu der Involution $n$ter Ordnung projectivisch. Den jeweilig besonderen Gruppen $C_1 C_2 \dots C_n$ und $D_1 D_2 \dots D_n$ entsprechen die aus ihnen entnommenen Bestandtheile.

Genau auf diese Weise lieſsen wir im § 32 die Involutionen $n$ter Ordnung aus denen niedrigerer Ordnung entstehen. Das im zweiten Capitel betrachtete Gebilde ist daher mit der Involution der analytischen Geometrie identisch. Der Lehrsatz, daſs zwei projectivische Involutionen $(n-m)$ter und $m$ter Ordnung im Allgemeinen n verschiedene Coincidenzelemente ergeben, wenn sie demselben Träger angehören, ist zu dem Fundamentalsatz der Algebra äquivalent, daſs jede Gleichung $n$ten Grades sich in n lineare Factoren auflösen läſst.

Die Aussage des § 34b über Involutionsgruppen mit mehrfachen Elementen folgt analytisch genommen aus den ersten Regeln der Differentialrechnung.

Die Stetigkeitsbetrachtungen, welche in den §§ 35—39 enthalten sind, finden ihren analytischen Ausdruck in dem einen Satze, daſs mit den Coëfficienten einer Gleichung $n$ten Grades die Wurzeln sich stetig verändern.

§§ 181—183. Wir wollen nunmehr die Schlüsse von n auf $n+1$ analytisch erläutern, mit deren Hülfe wir (§§ 40—47) geometrisch er-

wiesen haben, daſs eine Involution mit Hülfe aller charakteristischen Reihen auf andere Gebilde projectivisch bezogen werden kann.

§ 181. Die Gleichung

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n+1})-\lambda(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_{n+1})=0 \quad 1)$$

einer Involution $(n+1)$ter Ordnung entsteht aus der Elimination von μ zwischen

$$(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{n-m+1}) \quad -\mu(x-\beta_1)\dots(x-\beta_{n-m+1}) \quad =0, \quad 2a)$$

$$\lambda(x-\beta_{n-m+2})\dots(x-\beta_{n+1})-\mu(x-\alpha_{n-m+2})\dots(x-\alpha_{n+1})=0, \quad 2b)$$

ferner aus der Elimination von μ und ϱ zwischen

$$(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{n-m}) \quad -\varrho(x-\beta_1)\dots(x-\beta_{n-m}) \quad =0, \quad 3a)$$

$$\mu(x-\beta_{n-m+1}) \quad -\varrho(x-\alpha_{n-m+1}) \quad =0, \quad 3b)$$

$$\lambda(x-\beta_{n-m+2})\dots(x-\beta_{n+1})-\mu(x-\alpha_{n-m+2})\dots(x-\alpha_{n+1})=0. \quad 3c)$$

Hier kann man nun zuerst μ eliminiren und bekommt so als äquivalent zu 1) das neue Gleichungspaar

$$(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{n-m})-\varrho(x-\beta_1)\dots(x-\beta_{n-m}) \quad =0, \quad 4a)$$

$$\lambda(x-\beta_{n-m+1})\dots(x-\beta_{n+1})-\varrho(x-\alpha_{n-m+1})\dots(x-\alpha_{n+1})=0. \quad 4b)$$

In diesen analytischen Operationen ist das Verfahren des § 41 beschrieben. Die projectivischen Reihenpaare 2a) und 2b) dienen zunächst zur Definition der Involution. Hierbei sind $A_1A_2\dots A_{n-m+1}$ und $B_1B_2\dots B_{n-m+1}$ vorläufig zwei ganz besondere Bestandtheile der ausgezeichneten Gruppen $A_1A_2\dots A_{n+1}$, $B_1B_2\dots B_{n+1}$. Es soll eben im § 41 gezeigt werden, daſs innerhalb dieser ausgezeichneten Gruppen wenigstens die ersteren beliebig ausgewählt werden können, und daſs auch m innerhalb der Grenzen von 1 bis n willkürlich ist. Die Gleichung 2a) wird im Texte mit I bezeichnet, und 2b) geht nach Fixirung von λ auf λ_δ in eine Reihe II_δ über, die nun mit I eine bestimmte Gruppe der Involution erzeugt. Da nur von n auf $n+1$ zu schlieſsen ist, so kann man für die Involution I alle Erzeugungsweisen des § 32 voraussetzen. Man kann ihre zu $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ gehörenden Gruppen erzeugen durch die Reihe III mit der Gleichung 3a) und durch die Reihen $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \dots$, in deren Gleichungen 3b) übergeht, wenn man die speciellen Annahmen für μ macht. Fixirt man andererseits ϱ auf $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, so erhält man aus 3b) der Reihe nach die Gleichungen der charakteristischen Reihen $\mathrm{I}_1', \mathrm{I}_2', \mathrm{I}_3', \dots$ der Involution 1.

Dieselben sind zu ihr selbst und zu der Involution II_s projectivisch. In den Coincidenzelementen zwischen II_s und $\mathrm{I}_1', \mathrm{I}_2', \mathrm{I}_3', \ldots$ erhielten wir nun die Gruppen der Involution $A_{n-m+1}, \ldots A_{n+1}, B_{n-m+1} \ldots B_{n+1}$. Ihre Gleichungen liefert 4b), wenn wir λ auf λ_s und μ der Reihe nach auf μ_1, $\mu_2, \mu_3, \ldots$ fixiren. Die Aufgabe ist also vollständig zu ersetzen durch die andere, eine Involution III mit der Gleichung 4a) oder 3a) zur Coincidenz mit einer projectivischen Involution IV_s zu bringen, deren Gleichung 4b) für den speciellen Werth λ_s liefert. Wenn ϱ auf $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ fixirt wird, so geht 4b) in die Gleichung neuer charakteristischer Reihen $\mathrm{IV}_1', \mathrm{IV}_2'$, $\mathrm{IV}_3', \ldots$ über, die zu den früheren $\mathrm{II}_1', \mathrm{II}_2', \mathrm{II}_3' \ldots$ projectivisch sind, welche 2b) nach Fixirung von μ auf $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$ liefert. Damit war dann dargethan, dafs unabhängig von der Wahl der Gruppen $A_1 A_2 \ldots A_{n-m}$ und $B_1 B_2 \ldots B_{n-m}$ jedes Reihenpaar von der betrachteten Form zur Erzeugung der Involutionsglieder dienen kann.

§ 182. Hierauf wird nun im § 43 zunächst gezeigt, wie die n-Elemente zu finden sind, die mit irgend einem Elemente C_2 zu derselben Gruppe der Involution gehören. Analytisch läfst sich dies so erläutern: Man bezeichne mit $f(x), g(x), \mathfrak{h}(x), \ldots$ ganze Functionen $(n-1)$ten Grades, bei denen 1 der Coëfficient des höchsten Gliedes ist.

Die Gleichung der untersuchten Gruppe CC_1C_2 der Involution AA_1A_2, BB_1B_2, die auf einer Geraden liege, kann dann in die Form gebracht werden

$$1)\quad \begin{aligned}&(x-\alpha_2)(x-\alpha_1)f(x) - \lambda_1(x-\beta_2)(x-\beta_1)g(x)\\ &\equiv (1-\lambda_1)(x-\gamma_2)(x-\gamma_1)h(x) = 0\,.\end{aligned}$$

Wenn man von einem Zahlenfactor absieht, ist dieselbe das Resultat der Elimination von μ zwischen

$$2\text{a})\quad (\alpha_2-\gamma_2)(x-\alpha_1)f(x) - \mu\lambda_1(\beta_2-\gamma_2)(x-\beta_1)g(x) = 0\,,$$
$$2\text{b})\quad (\alpha_2-\gamma_2)(x-\beta_2) - \mu(\beta_2-\gamma_2)(x-\alpha_2) = 0\,.$$

Für $\mu = 1$ erhalten wir aus 2b) offenbar die Gleichung von γ_2:

$$3\text{b})\quad (\alpha_2-\gamma_2)(x-\beta_2) - (\beta_2-\gamma_2)(x-\alpha_2) \equiv (\alpha_2-\beta_2)(x-\gamma_2)\,.$$

Da nun das Erzeugnifs der Involutionen 2a) und 2b) die durch C_2 bestimmte Gruppe der Involution 1) ist, so mufs die zu $\mu = 1$ gehörende Gruppe von 2a) den Punkt C_2 enthalten. Folglich besteht auch die Identität

$$(\alpha_2-\gamma_2)(x-\alpha_1)f(x)-\lambda_1(\beta_2-\gamma_2)(x-\beta_1)g(x) \equiv \{\alpha_2-\gamma_2-\lambda_1(\beta_2-\gamma_2)\}(x-\gamma_2)\mathfrak{h}(x)\,. \qquad 3\text{a})$$

$\mathfrak{h}(x)=0$ ist die Gleichung der Gruppe $\mathfrak{C}$. Jetzt eliminire man aus 2a) und 3a) $(x-\beta_1)g(x)$, aus 2b) und 3b) $(x-\alpha_2)$, so erhält man:

$$(1-\mu)(\alpha_2-\gamma_2)(x-\alpha_1)f(x)+\mu\{\alpha_2-\gamma_2-\lambda_1(\beta_2-\gamma_2)\}(x-\gamma_2)\mathfrak{h}(x)=0. \qquad 4\text{a})$$

$$(1-\mu)(\alpha_2-\gamma_2)(x-\beta_2)+\mu(\alpha_2-\beta_2)(x-\gamma_2)=0. \qquad 4\text{b})$$

Die Elimination von μ ergiebt, von constanten Factoren abgesehen, die Gleichung der untersuchten Gruppe. An die Stelle dieser beiden Gleichungen kann man, wie es im § 43 geschieht, die drei folgenden treten lassen:

$$\{\alpha_2-\gamma_2-\lambda_1(\beta_2-\gamma_2)\}\mathfrak{h}(x)-\varrho(\alpha_2-\gamma_2)f(x)=0\,. \qquad 5\text{a})$$

$$(1-\mu)(x-\alpha_1)+\mu\varrho(x-\gamma_2)=0\,. \qquad 5\text{b})$$

$$(1-\mu)(\alpha_2-\gamma_2)(x-\beta_2)+\mu(\alpha_2-\beta_2)(x-\gamma_2)=0\,. \qquad 5\text{c})$$

Indem man endlich zwischen den beiden letzten Gleichungen $\mu(x-\gamma_2)$ eliminirt, bekommt man

$$\{\alpha_2-\gamma_2-\lambda_1(\beta_2-\gamma_2)\}\mathfrak{h}(x)-\varrho(\alpha_2-\gamma_2)f(x)=0\,. \qquad 6\text{a})$$

$$(\alpha_2-\beta_2)(x-\alpha_1)-\varrho(\alpha_2-\gamma_2)(x-\beta_2)=0\,. \qquad 6\text{b})$$

Die Elimination von ϱ aus diesen Gleichungen liefert bis auf einen Zahlenfactor die Gleichung $(x-\gamma_1)h(x)=0$ der Gruppe CC_1. Da nun $\mathfrak{h}(x)=0$ die Gleichung von $\mathfrak{C}$ ist, so drücken 6a) und 6b) analytisch die Thatsache aus, dafs CC_1 eine Gruppe der Involution $AA_1, \mathfrak{C}B_2$ ist. Dieselben zeigen auch, dafs bei der Erzeugung von CC_1 den Gruppen $\mathfrak{C}$ und A (mit der Gleichung $f(x)=0$) die Elemente A_1 und B_2 zugeordnet werden. Im § 43 wurde bewiesen, dafs der B_1 enthaltenden Gruppe $\mathfrak{B}$ von $A, \mathfrak{C}$ der Punkt C_1' zugeordnet wird, der mit C_2 ein Paar der Involution A_1A_2, B_1B_2 bildet. Wir wollen dasselbe analytisch zeigen. Das Paar $C_1'C_2$ ist das Erzeugnifs zweier specieller Reihen 5b) und 5c), und zwar mufs, da in allen Reihenpaaren 5b) und 5c) A_1 und B_2 sich entsprechen (für $\mu=0$), in diesem besonderen Falle B_1A_2 ein Paar entsprechender Punkte sein. Alsdann erhalten wir aus 5b) und 5c) zwei Reihen

$$x-\alpha_1-\varkappa(x-\beta_1)=0\;,\;(x-\beta_2)-\lambda\varkappa(x-\alpha_2)=0\;,$$

deren Erzeugnifs wirklich ein Paar der Involution A_1A_2, B_1B_2 ist.

Der Punkt A_2 oder α_2 gehört dem Parameter $\mu = \infty$ in 5c) zu, oder es ist für ihn $\frac{1-\mu}{\mu} = -1$. Da diesem Punkte β_1 entsprechen soll, so erhält man aus 5b)

$$(\beta_1 - \gamma_2)\varrho = \beta_1 - \alpha_1 .$$

Der besondere Punkt C_1' von 6b) wird daher aus

7) $$(\beta_1-\gamma_2)(\alpha_2-\beta_2)(x-\alpha_1) - (\beta_1-\alpha_1)(\alpha_2-\gamma_2)(x-\beta_2) = 0$$

bestimmt; ihm entspricht eine Gruppe mit der Gleichung

8) $$(\beta_1-\gamma_2)\{\alpha_2-\gamma_2-\lambda_1(\beta_2-\gamma_2)\}\,\mathfrak{h}(x) - (\beta_1-\alpha_1)(\alpha_2-\gamma_2)f(x) = 0 .$$

Sie enthält den Punkt B_1 mit dem Theilverhältnifs β_1. Denn das Erzeugnifs der projectivischen Gebilde

9a) $$(\beta_1-\gamma_2)\{\alpha_2-\gamma_2-\lambda(\beta_2-\gamma_2)\}\,\mathfrak{h}(x) - \sigma(\beta_1-\alpha_1)(\alpha_2-\gamma_2)f(x) = 0,$$

9b) $$(\beta_1-\gamma_2)(x-\alpha_1) - \sigma(\beta_1-\alpha_1)(x-\gamma_2) = 0$$

hat die Gleichung

10) $$\{\alpha_2-\gamma_2-\lambda_1(\beta_2-\gamma_2)\}(x-\gamma_2)\mathfrak{h}(x) - (\alpha_2-\gamma_2)(x-\alpha_1)f(x) = 0 ,$$

ist also wegen 3a) mit BB_1 identisch; für $\sigma = 1$ geht nun 9b) in die Gleichung für B_1 über. Es mufs folglich auch die Gleichung 8), in die 9a) für $\sigma = 1$ sich verwandelt, die Wurzel β_1 besitzen. Es wird C_1' wirklich der Gruppe $\mathfrak{B}$ zugewiesen.

§ 183. In den §§ 44 und 45 wird nun gezeigt, dafs die beiden Involutionen AA_1A_2, BB_1B_2 und AA_1A_2, CC_1C_2 identisch sind, wenn CC_1C_2 irgend eine Gruppe der ersteren Involution ist. Dieser Beweis knüpft an folgende specielle Thatsache an. Bei der Erzeugungsweise

$$AA_1, BB_1, \ldots \;\overline{\wedge}\; B_2, A_2, \ldots$$

müssen einer festen Gruppe der ersteren Involution vier Elemente A_2, B_2, Y_2, Z_2 zugeordnet werden, damit die durch A_2, B_2, C_2 und D_2 bestimmten Gruppen der Involution AA_1A_2, BB_1B_2 entstehen. Ferner seien A_2, X_2, C_2, Z_2 die Elemente, die bei der Erzeugungsweise

$$AA_1, CC_1, \ldots \;\overline{\wedge}\; C_2, A_2, \ldots$$

der Involution AA_1A_2, CC_1C_2 irgend einer Gruppe der Involution $n$ter Ordnung zugeordnet werden müssen, damit die durch A_2, B_2, C_2 und D_2 bestimmten Gruppen dieser Involution $(n+1)$ter Ordnung entstehen.

Es handelt sich dann nur darum, zu zeigen, dafs

$$A_2B_2Y_1Z_1 \barwedge A_2X_2C_2Z_2$$

ist. Wenn diese Beziehung allgemein gilt, so gehören alle Elemente, die eine Gruppe von AA_1A_2, BB_1B_2 bilden, auch zu einer Gruppe von AA_1A_2, CC_1C_2; mit ihr ist also zugleich die Identität beider Involutionen nachgewiesen.

Die Reihe projectivischer Beziehungen des § 44 stellt sich analytisch in der Form einer Reihe von Doppelverhältnifs-Gleichungen dar. Für das erste Doppelverhältnifs $(A_2B_2C_2Z_1)$, das wir erhalten, wofern wir die feste Gruppe von AA_1, BB_1 mit $\mathfrak{C}C_2$ zusammenfallen lassen, brauchten wir die Gleichungen

$$(A_2B_2Z_1D_2) = (BB_1, AA_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2), \qquad 1)$$
$$(AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2) = (A_1B_1C_2E_1), \qquad 2)$$
$$(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'') = (C_2A_1E_1D_2). \qquad 3)$$

In dem linken Doppelverhältnifs von 3) bedeuteten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}''$ die durch B_1 und D_2 bestimmten Gruppen der Involution $A, \mathfrak{C}$. Für die Involution $n$ter Ordnung $AA_1, \mathfrak{C}C_2$ haben wir nach den Voraussetzungen unseres Inductionsschlusses alle Erzeugungsweisen der besprochenen Art (§ 180) vorauszusetzen; wir können also ihre Gruppen aus den Reihenpaaren

$$A, \mathfrak{C}, \ldots \barwedge C_2, A_1, \ldots$$

entstehen lassen. Da der B_1 enthaltenden Gruppe $\mathfrak{B}$ A_1, C_2, B_1 und das aus 3) ermittelte Element E_1 zugeordnet werden müssen, damit AA_1, $\mathfrak{C}C_2, BB_1, \mathfrak{D}D_2$ entstehen, so ist dann auch 2) als richtig angenommen.

Aus 1) erhält man durch Multiplication mit $(A_2B_2C_2Z_1)$ die Gleichung

$$(A_2B_2C_2Z_1)(BB_1, AA_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2) = (A_2B_2C_2Z_1)(A_2B_2Z_1D_2)$$
$$= (A_2B_2C_2D_2)$$

oder

$$(A_2B_2C_2Z_1) = (A_2B_2C_2D_2)(AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2). \qquad 4)$$

Andererseits kann man 2) auf die Formen bringen

$$(AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2) = 1 - (A_1C_2B_1E_1),$$
$$1 - (AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2) = (A_1C_2B_1E_1),$$

und hieraus folgt in Verbindung mit 3)

5) $(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}''):\{1-(AA_1\,,BB_1\,,\mathfrak{C}C_2\,,\mathfrak{D}D_2)\} = (C_2A_1B_1D_2)\,.$

Wenn man nun das Doppelverhältnifs $(AA_1\,,BB_1\,,\mathfrak{C}C_2\,,\mathfrak{D}D_2)$ zwischen 4) und 5) eliminirt, so bekommt man

$$(A_2B_2C_2Z_1) = (A_2B_2C_2D_2)\left(1-\frac{(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'')}{(C_2A_1B_1D_2)}\right)$$

oder

6) $$(A_2B_2C_2Z_1) = \frac{\alpha_2-\gamma_2}{\beta_2-\gamma_2}\cdot\frac{\beta_2-\delta_2}{\alpha_2-\delta_2}\left\{1-(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'')\cdot\frac{\gamma_2-\delta_2}{\alpha_1-\delta_2}\cdot\frac{\alpha_1-\beta_1}{\gamma_2-\beta_1}\right\}.$$

Zu den drei Gleichungen 1), 2) und 3) ist also analytisch genommen die Thatsache äquivalent, dafs $(A_2B_2C_2Z_1)$, das erste der betrachteten Doppelverhältnisse, eine ganze lineare Function von $(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'')$ ist, in deren Coëfficienten nur die bekannten Theilverhältnisse $\alpha_1,\alpha_2\,,\beta_1,\beta_2\,,\gamma_2,\delta_2$ der Elemente $A_1,A_2\,,B_1,B_2\,,C_2,D_2$ auftreten.

Für das zweite Doppelverhältnifs $(A_2C_2B_2Z_2)$ brauchten wir ebenfalls eine Reihe von Doppelverhältnifs-Gleichungen.

7) $$(CC_1\,,AA_1\,,\mathfrak{C}B_2\,,\mathfrak{D}'D_2) = (A_2C_2Z_2D_2)\,.$$

Wir kannten das Glied $\mathfrak{C}B_2$ der Involution $CC_1\,,AA_1$ und wufsten, dafs demselben $A_2\,,B_2$ und C_2 zugeordnet werden mufsten, damit die zu $A_2\,,B_2\,,C_2$ gehörenden Gruppen der Involution $AA_1A_2\,,CC_1C_2$ entstanden. Der Gruppe $\mathfrak{C}B_2$ mufste das aus 7) entnommene Element Z_2 zugeordnet werden, wenn das D_2 enthaltende Glied entstehen sollte. Da nur von n auf $n+1$ geschlossen werden sollte, gilt für die Involution linker Hand die Erzeugungsweise

$$A\,,\mathfrak{C}\,,\ldots \qquad B_2\,,A_1\,,\ldots\,,$$

und zu dem Wurfe $(AA_1\,,CC_1\,,\mathfrak{C}B_2\,,\mathfrak{D}'D_2)$ ist der Wurf der Elemente projectivisch, die $\mathfrak{B}$ zugeordnet werden müssen, damit $AA_1\,,CC_1\,,\mathfrak{C}B_2\,,$ $\mathfrak{D}'D_2$ entstehen. Das war für CC_1 das Element C_1', das aus der Gleichung

8) $$(A_1B_1C_2C_1') = (B_2A_2C_2C_1')$$

entspringt; für $\mathfrak{D}'D_2$ das aus der Beziehung

9) $$(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'') = (B_2A_1F_1D_2)$$

entnommene Element F_1. Es ist also dann

10) $$(AA_1\,,CC_1\,,\mathfrak{C}B_2\,,\mathfrak{D}'D_2) = (A_1C_1'B_2F_1)\,.$$

Indem man 7) mit $(A_2C_2B_2Z_2)$ multiplicirt, erhält man

$$(A_2C_2B_2Z_2)(CC_1, AA_1, \mathfrak{C}B_2, \mathfrak{D}'D_2) = (A_2C_2Z_2D_2)\cdot(A_2C_2B_2Z_2) = (A_2C_2B_2D_2),$$

oder

$$(A_2C_2B_2Z_2) = (A_2C_2B_2D_2)(AA_1, CC_1, \mathfrak{C}B_2, \mathfrak{D}'D_2). \qquad 11)$$

10) nimmt die Formen an

$$(AA_1, CC_1, \mathfrak{C}B_2, \mathfrak{D}'D_2) = 1 - (A_1B_2C_1'F_1),$$
$$1-(AA_1, CC_1, \mathfrak{C}B_2, \mathfrak{D}'D_2) = (A_1B_2C_1'F_1), \qquad 12)$$

und diese Beziehung ergiebt in Verbindung mit 9) die Gleichung

$$(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}''):\{1-(AA_1, CC_1, \mathfrak{C}B_2, \mathfrak{D}'D_2)\} = (B_2A_1C_1'D_2). \qquad 13)$$

Mit ihrer Hülfe geht 11) über in

$$(A_2C_2B_2Z_2) = (A_2C_2B_2D_2)\left\{1 - \frac{(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'')}{(B_2A_1C_1'D_2)}\right\}. \qquad 14)$$

Die Gleichung des Elementes C_1' hatten wir schon abgeleitet (§ 182, 7). Sie lautete:

$$(\beta_1-\gamma_2)(\alpha_2-\beta_2)(x-\alpha_1) - (\beta_1-\alpha_1)(\alpha_2-\gamma_2)(x-\beta_2) = 0.$$

Also ist

$$(B_2A_1C_1'D_2) = \frac{\beta_1-\gamma_2}{\beta_1-\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_2-\gamma_2}\cdot\frac{\alpha_1-\delta_2}{\beta_2-\delta_2},$$

und wir erhalten schliefslich

$$(A_2C_2B_2Z_2) = \frac{\alpha_2-\beta_2}{\gamma_2-\beta_2}\cdot\frac{\gamma_2-\delta_2}{\alpha_2-\delta_2}\left\{1-(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'')\frac{\beta_1-\alpha_1}{\beta_1-\gamma_2}\cdot\frac{\alpha_2-\gamma_2}{\alpha_2-\beta_2}\cdot\frac{\beta_2-\delta_2}{\alpha_1-\delta_2}\right\}. \qquad 15)$$

In den beiden Gleichungen 15) und 6)

$$(A_2B_2C_2Z_2) = \frac{\alpha_2-\gamma_2}{\beta_2-\gamma_2}\cdot\frac{\beta_2-\delta_2}{\alpha_2-\delta_2}\left\{1-(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'')\frac{\gamma_2-\delta_2}{\alpha_1-\delta_2}\cdot\frac{\alpha_1-\beta_1}{\gamma_2-\beta_1}\right\} \qquad 6)$$

liegt der Inhalt des § 44 ausgesprochen. Der zu beweisende Satz ist, dafs Z_1 und Z_2 zusammenfallen, oder dafs

$$(A_2B_2C_2Z_1) + (A_2C_2B_2Z_2) = +1$$

ist. Es würde diese Thatsache aus den entwickelten Formeln sich ergeben, aber man kann sie auch indirect ableiten. So lange man $A_1, A_2, B_1, B_2, C_2, D_2$ festhält, hängt der zu erweisende Satz nicht von der besonderen Natur der Gruppen $A, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}''$ ab, sondern nur von dem Zahlenwerth ihres Doppelverhältnisses. Setzt man daher

$$(A_0B_1\mathfrak{C}_0D_2) = (A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}''),$$

und ist $B_0 B_1$ ein Paar der Involution $A_0 A_1$, $\mathfrak{C}_0 C_2$, so genügt es vollständig den Satz für die Involution $A_0 A_1 A_2$, $B_0 B_1 B_2$ zu erweisen, weil nur in 15) und 6) für $(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'')$ die gleiche, aber anders bezeichnete Zahl $(A_0 \mathfrak{C}_0 B_1 D_2)$ eintritt. Indem dann noch im § 45 A_0 mit B_2 zusammenfällt, wird der Satz auf den entsprechenden für die Involution zweiter Ordnung $A_1 A_2$, $B_0 B_1$ zurückgeführt, der vorher (§§ 24—26) auf ganz andere Weise bewiesen war.

Aus der mehrmaligen Anwendung der §§ 40—45 folgte dann, dafs die Involution durch irgend zwei ihrer Gruppen, EE_1E_2 und FF_1F_2, in der bezeichneten Weise bestimmt und zu allen ihren charakteristischen Reihen projectivisch gesetzt werden kann.

§ 184. In den §§ 48—56 werden die singulären Gruppen der Involutionen behandelt.

Die Involutionen mit einem $(n+1)$ fachem Element D_1 werden zuerst untersucht; wenn D_2 irgend ein zweites Element des Trägers ist, und die anderen Elemente desselben durch ihre Theilverhältnisse bezüglich D_1 und D_2 bestimmt sind, so hat die Involution die Gleichung

$$1) \qquad x^{n+1} - \lambda(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n+1}) = 0\,.$$

Jetzt werden zwei projectivische Gebilde auf dem Träger angenommen, die D_1 und D_2 entsprechend gemeinsam haben, so dafs für irgend zwei entsprechende Elemente die Gleichung gilt

$$y' = (1+\delta)y\,.$$

Aus jeder Gruppe entsteht dann eine andere, aus der Involution eine zu ihr projectivische

$$2) \quad x^{n+1} - \lambda(x-\alpha_1(1+\delta))(x-\alpha_2(1+\delta))\ldots(x-\alpha_{n+1}(1+\delta)) = 0\,;$$

wirklich liefert die Substitution von $x=\gamma$ und $x=\gamma(1+\delta)$ in die Gleichungen 1) und 2) die wesentlich identischen Resultate

$$\gamma^{n+1} - \lambda(\gamma-\alpha_1)(\gamma-\alpha_2)\ldots(\gamma-\alpha_{n+1}) = 0\,.$$
$$(1+\delta)^{n+1}\{\gamma^{n+1} - \lambda(\gamma-\alpha_1)(\gamma-\alpha_2)\ldots(\gamma-\alpha_{n+1})\} = 0\,.$$

Nun subtrahire man die beiden Gleichungen 1) und 2), so bekommt man

$$3) \qquad \begin{aligned}&(x-\alpha_1(1+\delta))(x-\alpha_2(1+\delta))\ldots(x-\alpha_{n+1}(1+\delta))\\ &\quad -(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n+1}) = 0\,.\end{aligned}$$

Dies ist eine Gleichung $n$ten Grades, von der für den Inductionsschluſs vorausgesetzt werden muſs, daſs sie n Wurzeln besitzt. Zugleich bildet aber auch die Gruppe 3) augenscheinlich mit dem Element D_2 oder $x = \infty$ ein Glied der Involution aus irgend zwei homologen Gruppen von 1) und 2). Die Gleichung geht nun an der Grenze, für verschwindendes δ, über in

$$\alpha_1(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_{n+1}) + \alpha_2(x-a_3)\dots(x-a_{n+1})(x-a_1) \quad 4)$$
$$+\dots\alpha_{n+1}(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) \equiv (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n+1})\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\alpha_i}{x-a_i} = 0,$$

in die bekannte Gleichung der Elemente, die in Gruppen der Involution mehrfach enthalten sind.

Die Gruppe 4) gestattet folgende Darstellung

$$0 = (x-a_1)\{\alpha_2(x-a_3)\dots(x-a_{n+1}) + \dots\alpha_{n+1}(x-a_2)\dots(x-a_n)\} \quad 5)$$
$$+\alpha_1(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_{n+1}) \equiv (x-a_1)\dots(x-a_{n+1})\left\{\frac{\alpha_1}{x-a_1} + \sum_{i=2}^{n+1}\frac{\alpha_i}{x-a_i}\right\},$$

und darnach folgende projectivische Erzeugung

$$(x-a_2)\dots(x-a_{n+1})\left\{\sum_{i=2}^{n+1}\frac{\alpha_i}{x-a_i} - \sigma\frac{1}{x-a_2}\right\} = 0, \qquad 6a)$$

$$\alpha_1(x-a_2) + \sigma(x-a_1) = 0. \qquad 6b)$$

Für $\sigma = 0$ erhalten wir in 6a) die Gruppe $\mathfrak{D}$ der Doppelelemente von D_1^n, AA_2; dieser Gruppe wird also A_2 zugeordnet. Für $\sigma = \infty$ erhalten wir A und A_1 als entsprechende Gebilde. Wenn wir nunmehr $\sigma = \alpha_2$ setzen, so erhalten wir in 6a) eine Form mit dem Factor $(x-a_2)$, also die Gleichung der Gruppe $\mathfrak{E}$ der Involution $A, \mathfrak{D}$; zugeordnet wird ihr das Element

$$\alpha_1(x-a_2) + \alpha_2(x-a_1) = 0, \qquad 7)$$

also das zweite Doppelelement $\mathfrak{E}_1$ der Involution D_1^2, A_1A_2. Durch diese projectivischen Gebilde

$$A\mathfrak{D}\mathfrak{E}\dots \;\overline{\wedge}\; A_2A_1\mathfrak{E}_1\dots$$

wird auch im geometrischen Sinne (§ 54) die Gruppe der Doppelelemente bestimmt. Wir gelangen zu der soeben wieder beschriebenen Erzeugung, indem wir die im § 182 auch analytisch bestätigte Methode zur Auffindung der durch D_2 bestimmten Gruppe der Involution 3) benutzen und die erhaltenen projectivischen Gebilde einen Grenzübergang machen lassen.

Hat die Involution $(n+1)$ter Ordnung D_2 zum $(n+1)$fachen Element, so lautet ihre Gleichung:

$$8)\qquad (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n+1}) = \lambda .$$

Die Gleichung ihrer Doppelelemente ist dann:

$$9)\quad (x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n+1}) + (x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_{n+1})(x-\alpha_1) + \ldots$$
$$(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n+1})\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{x-\alpha_i} = 0 .$$

§ 185. Die allgemeine Involution $(n+1)$ter Ordnung kann höchstens $2n$ Doppelelemente besitzen.

Wir betrachten die beiden projectivischen Involutionen

$$1\text{a})\ (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n+1}) - \lambda(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_{n+1}) = 0,$$

$$1\text{b})\qquad (x-\alpha_1(1+\delta))\ldots(x-\alpha_{n+1}(1+\delta))$$
$$- \lambda(x-\beta_1(1+\delta))\ldots(x-\beta_{n+1}(1+\delta)) = 0 .$$

Hierin sollen $x;\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_{n+1};\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_{n+1}$ wieder die Theilverhältnisse der Elemente $X;A_1,A_2,\ldots A_{n+1};B_1,B_2,\ldots B_{n+1}$ hinsichtlich D_1 und D_2 bezeichnen. Elemente, die zwei homologen Gruppen angehören, sind aus der Gleichung

$$2)\quad (x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{n+1})(x-\beta_1(1+\delta))\ldots(x-\beta_{n+1}(1+\delta))$$
$$-(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_{n+1})(x-\alpha_1(1+\delta))\ldots(x-\alpha_{n+1}(1+\delta)) = 0$$

zu entnehmen.

Ist $x=\gamma(1+\delta)$ eine Wurzel von 2), so gehören die Elemente mit den beiden Theilverhältnissen γ und $\gamma(1+\delta)$ derselben Gruppe der Involution 1a) an. Von 2) kann man den Factor δ ablösen. Ihre Wurzeln geben an der Grenze diejenigen Elemente an, die in ihren Involutionsgruppen mehrfach auftreten. Nach den Voraussetzungen unserer Inductionsschlüsse können wir nicht behaupten, dafs solche Wurzeln vorhanden sind, aber analytisch kann gezeigt werden, dafs unsere Gleichung höchstens $2(n+1)$ Wurzeln besitzt. Da in der Gleichung kein constantes Glied auftritt, und dieselbe in Wirklichkeit nur bis zum $(2n+1)$ten Grade ansteigt, so kennen wir 2 Wurzeln, 0 und ∞, derselben von vorne herein; unserer Aufgabe genügen höchstens $2n$ Elemente.

Die Gleichung 2) können wir, abgesehen von einem constanten Factor, auf die Form bringen

$$\{(x-\alpha_1(1+\delta))\dots(x-\alpha_{n+1}(1+\delta))-(1+\delta)^{n+1}(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{n+1})\} \quad 3)$$
$$\{(x-\beta_1(1+\delta))\dots(x-\beta_{n+1}(1+\delta))-(x-\beta_1)\dots(x-\beta_{n+1})\}$$
$$-\{(x-\beta_1(1+\delta))\dots(x-\beta_{n+1}(1+\delta))-(1+\delta)^{n+1}(x-\beta_1)\dots(x-\beta_{n+1})\}$$
$$\{(x-\alpha_1(1+\delta))\dots(x-\alpha_{n+1}(1+\delta))-(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{n+1})\}\,.$$

Die neue Gleichung unterscheidet sich von der alten nur um den Factor $(1+\delta)^{n+1}-1$. Nachdem man durch δ^2 dividirt und den offenbar auftretenden Factor x abgelöst hat, erhält man an der Grenze bei verschwindendem δ die Gleichung aller Doppelelemente in der Form

$$(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{n+1})(x-\beta_1)\dots(x-\beta_{n+1})\times \quad 4)$$
$$\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{x-\alpha_i}\cdot\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\beta_k}{x-\beta_k}-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{x-\beta_i}\cdot\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\alpha_k}{x-\alpha_k}\right\}=0\,.$$

Dieselbe ist das Resultat der Elimination von μ zwischen

$$(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{n+1})\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{x-\alpha_i}-\mu\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\alpha_i}{x-\alpha_i}\right\}=0\,, \quad 5a)$$

$$(x-\beta_1)\dots(x-\beta_{n+1})\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{x-\beta_i}-\mu\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\beta_i}{x-\beta_i}\right\}=0\,. \quad 5b)$$

Für $\mu=0$ werden einander zugeordnet die Gruppen X_1X' und Y_1Y' der Doppelemente der Involutionen AA_1A_2, D_2^{n+1} und BB_1B_2, D_2^{n+1} (§ 184, 9). Für $\mu=\infty$ entsprechen sich die Gruppen X_2X'' und Y_2Y'' der Doppelelemente der Involutionen AA_1A_2, D_1^{n+1} und BB_1B_2, D_1^{n+1} (§ 184, 4). Wir verbinden nun mit beiden Gleichungen 5a) und 5b) die eine Gleichung

$$1-\mu\cdot x=0\,. \quad 6)$$

Die Involution 5a) erzeugt mit dem einförmigen Gebilde 6) eine Gruppe mit der Gleichung

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n+1})\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x}{x-\alpha_i}-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\alpha_i}{x-\alpha_i}\right\}$$
$$\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n+1})=0\,,$$

also AA_1A_2. Ebenso erzeugen 5b) und 6) die Gruppe BB_1B_2. Man kann also die beiden Gruppen AA_1A_2, BB_1B_2 durch die Reihenpaare

$$X_1X',\, X_2X'',\, X_3X''',\,\dots\ \overline{\wedge}\ D_2,\, D_1,\, D_3,\,\dots \quad 7a)$$

und

7b) $$Y_1Y', Y_2Y'', Y_3Y''', \ldots \;\overline{\wedge}\; D_2, D_1, D_3, \ldots$$

erzeugen, und es sind dann alle Doppelelemente sicherlich den beiden projectivischen Reihen

8) $$X_1X', X_2X'', X_3X''', \ldots \;\overline{\wedge}\; Y_1Y', Y_2Y'', Y_3Y''', \ldots$$

gemeinsam.

Gerade als Coincidenzelemente dieses speciellen Reihenpaares stellten sich aber auch auf geometrischem Wege alle etwa vorhandenen Doppelelemente heraus (§ 55).

Dafs die beiden projectivischen Reihen 1a) und 1b) neben D_1 und D_2 noch höchstens $2n$ andere Coincidenzelemente besitzen konnten, erhielten wir (§ 50) als einen Specialfall der Thatsache, dafs ein bestimmtes Reihenpaar

$$AA_1A_2', BB_1B_2, \ldots \;\overline{\wedge}\; B'B_1'B_2', A'A_1'A_2, \ldots$$

sich finden lassen mufste, welches alle Coincidenzelemente der beiden gegebenen Reihen

$$AA_1A_2, BB_1B_2, \ldots \;\overline{\wedge}\; B'B_1'B_2'. A'A_1'A_2', \ldots$$

besitzt (§ 49); wenn A_2' ein Coincidenzelement der beiden Reihen zweiter Art war, so zerfiel die erste Involution des ersten Paares in ein festes Element A_2' und in eine projectivische Involution $n$ter Ordnung.

Der analytische Ausdruck hierfür ist, dafs alle Coincidenzelemente einer Gleichung $2(n+1)$ten Grades von der Form

$$f(x)f_1(x)(x-\alpha_1)(x-\alpha_1')(x-\alpha_2)(x-\alpha_2')$$
$$-\lambda g(x)g_1(x)(x-\beta_1)(x-\beta_1')(x-\beta_2)(x-\beta_2')=0$$

genügen, die bei Vertauschung von α_2 und α_2' sich nicht ändert. Dies wird nun speciell auf die beiden Reihen 1a) und 1b) wiederholt angewendet. Es ergiebt sich, dafs ihre Coincidenzelemente auch zwei Reihen mit Gleichungen von der Form

$$(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{n+1})-\mu(x-\alpha_1(1+\delta))\ldots(x-\alpha_{n+1}(1+\delta))=0$$
$$(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_{n+1})-\varepsilon\mu(x-\beta_1(1+\delta))\ldots(x-\beta_{n+1}(1+\delta))=0$$

gemeinsam sind. Analytisch steht fest, dafs $\varepsilon=1$ ist; in unserer rein geometrischen Überlegung (§ 55) werden diese Reihen dadurch fixirt, dafs wir D_1 und D_2 als Coincidenzelemente von vorne herein kennen. Indem wir jede Involution von den Gruppen aus erzeugen, die durch

diese Elemente bestimmt werden, kommen wir zu einem Reihenpaar, das an der Grenze in die projectivischen Involutionen 5a) und 5b) $n$ter Ordnung übergeht.

§ 186. In den §§ 57—64 wird bewiesen, dafs eine Involution $n$ter Ordnung mit einem projectivischen einförmigen Gebilde desselben Trägers im Allgemeinen $n+1$ von einander verschiedene Elemente gemeinsam hat.

Es genügt, diese Thatsache an dem Beispiel der auf der Abscisse gelegenen Punktinvolutionen zu erweisen. Wird jeder Punkt $y=0$, $x=a+bi$ durch den reellen Punkt X mit den Coordinaten a, b repräsentirt, so haben wir eine specielle $(1, n)$-Beziehung zweier in einander liegender Ebenen zu betrachten und die entsprechend gemeinsamen Punkte beider festzustellen. Dieselben Repräsentationsebenen gehören, geometrisch genommen, einer Strahleninvolution und einem projectivischen Strahlbüschel zu, die einen der beiden Kreispunkte zum gemeinsamen Centrum haben.

Wenn die Gruppe als das Erzeugnifs der beiden Reihen

$$(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_{n+1})-\lambda(x-\beta_2)(x-\beta_3)\ldots(x-\beta_{n+1})=0, \quad 1\text{a})$$

$$\mu(x-\beta_1) \qquad -\lambda(x-\alpha_1) \qquad =0 \quad 1\text{b})$$

definirt ist, so gehört sie der Involution $(n+1)$ter Ordnung

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n+1})-\mu(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_{n+1})=0 \quad 2)$$

an. Sie verändert sich projectivisch zu dem Gliede

$$\mu(x-\beta_1)-\lambda_1(x-\alpha_1)=0\,, \qquad 3)$$

das einem festen, zu λ_1 gehörigen Gliede der Involution 1a) zugeordnet wird. Wir beziehen die Involution projectivisch auf eine andere Punktreihe

$$\mu(x'-\beta_0)-\gamma(x'-\alpha_0)=0\,. \qquad 4)$$

Jetzt bezeichnen wir mit $r_1, r_2, \ldots r_{n+1}$ die Entfernungen des Punktes X von den Punkten $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$, die die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n+1}$ repräsentiren, mit $r'_1, r'_2, \ldots r'_{n+1}$ die Entfernungen des Punktes X von $B_1, B_2, \ldots B_n$. Ebenso seien r und r' die Entfernungen des Repräsentanten X' von x' von A_0 und B_0, die α_0 und β_0 repräsentiren. Andererseits bezeichne man mit ϕ_i den Winkel, um welchen man in einem bestimmt gewählten Sinne einen Halbstrahl um A_i drehen mufs, damit er aus dem Parallelismus zur positiven

Richtung der x Axe in die Linie $A_i X$ gelange. Den Winkeln ϕ_k', ϕ und ϕ' verleihe man die analoge Bedeutung für B_k, A_0 und B_0. Alsdann wird

$$5) \qquad \frac{\mu}{\gamma} = \frac{r}{r'}\left\{\cos(\phi - \phi') + i \sin(\phi - \phi')\right\}.$$

Die Gleichung der Gruppe 2) nimmt die Form an:

$$6) \qquad \mu = \frac{r_1 r_2 \ldots r_{n+1}}{r_1' r_2' \ldots r_{n+1}'}\left\{\cos(\phi_1 + \cdots \phi_{n+1} - \phi_1' - \cdots \phi_{n+1}') + i \sin(\phi_1 + \cdots \phi_{n+1} - \phi_1' - \cdots \phi_{n+1}')\right\}.$$

Läfst man nun den Punkt X' irgend einen Kreis durchlaufen, so erhält man als Ort für die gesuchte Gruppe eine Kette der Involutionsebene. Setzt man

$$7) \qquad \phi - \phi' = c_0 ,$$

so beschreibt X' einen Kreisbogen, der durch A_0 und B_0 begrenzt wird. Dann erhält man eine entsprechende Halbkette mit der Gleichung:

$$7\text{a}) \qquad \phi_1 + \phi_2 + \cdots \phi_{n+1} - \phi_1' - \phi_2' - \cdots \phi_{n+1}' = c_0' + 2m'\pi .$$

Der entgegengesetzte Kreisbogen zu 7) kann durch

$$8) \qquad \phi - \phi' = c_0 + \pi ,$$

die entsprechende Halbkette durch

$$8\text{a}) \qquad \phi_1 + \phi_2 + \ldots \phi_{n+1} - \phi_1' - \phi_2' - \phi_{n+1}' = c_0' + (2m' + 1)\pi$$

dargestellt werden; m' ist in 7a) und 8a) eine willkürliche ganze Zahl.

Andererseits erhalten wir für die Gleichungen 1a) und 1b) die besonderen Formen:

$$9\text{a}) \qquad \frac{r_2 r_3 \ldots r_{n+1}}{r_2' r_3' \ldots r_{n+1}'}\left\{\cos(\phi_2 + \phi_3 + \cdots \phi_{n+1} - \phi_2' - \phi_3' - \cdots \phi_{n+1}') + i \sin(\phi_2 + \phi_3 + \cdots \phi_{n+1} - \phi_2' - \phi_3' \cdots - \phi_{n+1}')\right\} = \lambda ,$$

$$9\text{b}) \qquad \frac{r_1'}{r_1}\left\{\cos(\phi_1' - \phi_1) + i \sin(\phi_1' - \phi_1)\right\} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Nun setze man

$$10\text{a}) \quad \lambda = \varrho(\cos\tau + i \sin\tau) , \quad 10\text{b}) \quad \mu = \varrho_0'(\cos\beta + i \sin\beta) ,$$

dann bekommt man offenbar aus 9a) und 9b)

$$11\text{a}) \quad \phi_2 + \cdots \phi_{n+1} - \phi_2' - \cdots \phi_{n+1}' = \tau + 2m'\pi , \quad 11\text{b}) \quad \phi_1' - \phi_1 = \tau - \beta.$$

Für irgend einen constanten Werth von τ durchläuft der Punkt X in 11b) einen Kreisbogen B_1, A_1, und 11a) ist die Gleichung der entsprechenden

Halbkette der Involutionsebene 1a). Mit veränderlichem τ wird jedem Kreisbogen 11b) eine bestimmte Halbkette 11a) zugeordnet. Der Punkt A_k bestimmt an $A_2, A_3, \ldots A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots A_{n+1}, B_2, B_3, \ldots B_{n+1}$ specielle Winkel $\phi_2, \phi_3, \ldots \phi_{k-1}, \phi_{k+1}, \ldots \phi_{n+1}, \phi_2', \phi_3', \ldots \phi_{n+1}'$; die Summe derselben sei χ_k. Alsdann erhält man die Richtungen der Halbtangenten von 11a) in den Punkten $A_2, A_3, \ldots A_{n+1}$ aus den Gleichungen

$$\phi_2 + \chi_2 = \tau - \beta, \ \phi_3 + \chi_3 = \tau - \beta, \ \ldots \phi_{n+1} + \chi_{n+1} = \tau - \beta. \quad 12)$$

Analog bezeichne man mit χ_k' den speciellen Winkelwerth $\phi_2 + \phi_3 + \cdots \phi_{n+1} - \phi_2' - \cdots \phi_{k-1}' - \phi_{k+1}' - \cdots \phi_{n+1}'$ für B_k; dann sind offenbar die Winkel, welche die Tangenten in $B_2, B_3, \ldots B_{n+1}$ bestimmen, aus den Gleichungen

$$\chi_2' - \phi_2' = \tau - \beta; \ \chi_3' - \phi_3' = \tau - \beta; \ \ldots \chi_{n+1}' - \phi_{n+1}' = \tau - \beta \quad 13)$$

zu entnehmen. Hieraus geht hervor, dafs die beweglichen Tangenten in $A_2, A_3, \ldots A_{n+1}$ sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit τ um die bezüglichen Punkte drehen, die in $B_2, B_3, \ldots B_{n+1}$ aber in entgegengesetzter Richtung sich gleichmäfsig bewegen. Von den Tangenten des Kreisbogens 11b) schreitet die eine in B_1 in der positiven constanten Richtung, die andere in A_1 in der entgegengesetzten Richtung vorwärts. Die Elimination von τ aus 11a) und 11b) ergiebt die Gleichung 7a) der zu betrachtenden Halbkette; dieselbe wird also erzeugt durch die Halbkettenbüschel 11a) und 11b). Nun wird vorausgesetzt, dafs jede Gleichung $n$ten Grades (§ 32) n Wurzeln besitzt, und ferner, dafs dieselben sich mit den Coëfficienten der Gleichung stetig ändern (§ 39). Dann mufs jede Halbkette 11a) aus n Ranken bestehen, welche die Punkte $A_2, A_3, \ldots A_{n+1}$ mit den Punkten $B_2, B_3, \ldots B_{n+1}$ verbinden. Jedem Punkte eines Kreisbogens B_1, A_1 entsprechen nämlich n verschiedene Punkte der Halbkette. Für die Anfangslage fallen dieselben mit $A_2, A_3, \ldots A_{n+1}$, für die Endlage dagegen mit $B_2, B_3, \ldots B_{n+1}$ zusammen; für die Zwischenlagen aber verändert sich die Gruppe stetig.

Die Halbkette $(n+1)$ter Ordnung wird alsdann (§ 59) auf ihre Stetigkeit untersucht, nachdem zuvor festgesetzt ist, dafs keiner der höchstens $2n$ singulären Punkte der Ebene auf ihr liegen soll. Alsdann mufs jeder Punkt P derselben einem einzelnen unverzweigten Zuge angehören. Die auseinander gesetzte Erzeugungsweise der Halbkette $(n+1)$ter Ord-

nung kann verschiedentlich abgeändert werden. Für B_1 und A_1 können zwei beliebige Punkte B_{i_1} und A_{i_1} eintreten. Bei jeder Erzeugungsweise entspricht dem Kreisbogen B_{i_1}, D_2, A_{i_1} eine bestimmte Halbkette $n$ter Ordnung $A_{i_2} A^i, D_2, B_{i_2} B^i$. Hat nun die letztere in D_2 einen Doppelpunkt, oder berührt sie den Kreisbogen, so zeigt auch die untersuchte Halbkette $(n+1)$ter Ordnung dieselbe Tangente in D_2, wie B_{i_1}, D_2, A_{i_1}. Tritt nun dieser besondere Umstand für zwei verschiedene Halbketten B_{i_1}, D_2, A_{i_1} und B_{k_1}, D_2, A_{k_1} ein, die sich in D_2 nicht berühren, so mufs die Halbkette $(n+1)$ter Ordnung, da sie in D_2 sich zwei verschiedenen Kreisbögen anschmiegen müfste, sich hier nothwendig verzweigen. Eine solche Verzweigung kann aber nur dann eintreten, wenn D_2 in seiner Gruppe der Involution $(n+1)$ter Ordnuug mehrfach zählt.

Die Ergänzungsgruppe DD_1, welche in AA_1A_2, BB_1B_2 zu D_2 gehört, ist ein Glied von $AA_2, \mathfrak{D}B_1$, wo $\mathfrak{D}D_2$ zu AA_2, BB_2 gehört. Die Kette $AA_2, \mathfrak{D}B_1, DD_1$ des Involutionsfeldes AA_1, DD_1 ergiebt sich als Erzeugnifs zweier Kettenbüschel $AA_2, \mathfrak{D}D_2$ und B_1, D_2; in ihnen entsprechen die Ketten $AA_2, \mathfrak{D}D_2, BB_2$ und B_1, D_2, A_1 einander. Mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise nennen wir noch $r''_2, \ldots r''_{n+1}$ die Entfernungen eines Punktes X von D_2 und den Punkten der Gruppe $\mathfrak{D}$. Ferner sollen $\phi''_2, \ldots \phi''_{n+1}$ die zu $\phi_1, \phi'_2, \ldots$ analogen Winkel sein, die dem Punkte D_2 und denen von $\mathfrak{D}$ zugehören. Alsdann haben wir zwei Kettenbüschel mit den Gleichungen

$$\text{14a)} \quad \phi_2 + \phi_3 + \cdots \phi_{n+1} - (\phi''_2 + \phi''_3 + \cdots \phi''_{n+1}) = \sigma - m'\pi,$$

$$\text{14b)} \quad \phi'_1 - \phi''_2 = \sigma - \varepsilon - n'\pi$$

zu verbinden. Die Elimination von σ ergiebt das Resultat:

$$\text{15)} \quad \phi_2 + \phi_3 + \cdots \phi_{n+1} - (\phi'_1 + \phi''_3 + \cdots \phi''_{n+1}) = \varepsilon + (n' - m')\pi.$$

14a) und 14b) erzeugen also eine ganz bestimmte Kette der Involutionsebene $AA_2, \mathfrak{D}B_1$. Enthält die neue Halbkette den Punkt D_2, so mufs für die ihm zugehörigen Werthe $\chi_2, \chi_3, \ldots \chi_{n+1}; \chi'_2, \chi''_3, \ldots \chi''_{n+1}$ der Winkel $\phi^{(i)}_\chi$ die Beziehung bestehen

$$\chi_2 + \chi_3 + \cdots \chi_{n+1} - (\chi_2' + \chi_3'' + \cdots \chi_n'') = \varepsilon + (n' - m')\pi. \quad 16)$$

Die beiden Halbtangenten von 14a) in D_2 bestimmen mit der positiven Richtung der x Axe die Winkel

$$\gamma_2'' = \sigma - \{\chi_2 + \chi_3 + \cdots \chi_{n+1} - \chi_3'' - \cdots \chi_{n+1}''\} - m''\pi. \quad 17)$$

Die Halbtangenten in D_2 von 14b) bestimmen die Winkel

$$\delta_2'' = \sigma - \varepsilon + \chi_2' - n''\pi. \quad 18)$$

Hieraus folgt aber mit Rücksicht auf 16)

$$\gamma_2'' - \delta_2'' = m_0 \pi. \quad 19)$$

Es berühren sich mithin irgend zwei entsprechende Halbketten 14a) und 14b), wenn die Gleichung 16) besteht. Umgekehrt, wenn dies auch nur bei $AA_2, \mathfrak{D}D_2, BB_2$ und B_1, D_2, A_1 eintrifft, so enthält die Kette $AA_2, DD_1, \mathfrak{D}B_1$ den Punkt D_2. Würde nun noch B_{i_1}, D_2, A_1 von der entsprechenden Halbkette $AA_2, \mathfrak{D}'D_2, B'B_{i_2}$ berührt, so enthielte noch die zweite Kette $AA_2, \mathfrak{D}'B_{i_1}, DD_1$ den Punkt D_2. Da beide Ketten aufser AA_1 nur noch genau eine Gruppe gemeinsam haben, so mufs dann D_2 in DD_1 vorkommen. Enthält also die untersuchte Halbkette AA_1A_2, BB_1B_2 keine der singulären Gruppen, so kann A_1 aus der zweiten Gruppe so gewählt werden, dafs A_1, D_2, B_1 und AA_2, D_2, BB_2 sich nicht berühren, und dafs auch die letztere Curve D_2 nicht zum Doppelpunkte hat. Aus diesem Satze wird gefolgert, dafs die Halbkette überall unverzweigt ist und mit $n+1$ Zügen die $2(n+1)$ Punkte A_i, B_k verbindet.

Im zweiten Theile des Beweises wird (§§ 61 und 62) gezeigt, dafs jede der $n+1$ Ranken einen der Punkte A_i mit einem der Punkte B_k verbinden mufs.

Hiermit war der Hauptheil des Beweises geliefert. Es war nun leicht zu zeigen, dafs auf jedem einzelnen Zuge $A_{i_1}B_{i_1}$ ein Punkt der gesuchten Gruppe lag. Der analytische Inhalt des angewendeten Schlusses ist der: Die Gröfse $\frac{r_1 r_2 \ldots r_{n+1}}{r_1' r_2' \ldots r_{n+1}'}$ ändert sich von 0 bis $+\infty$, während der Punkt X den Zug $A_{i_1}B_{i_1}$ durchläuft; einmal wenigstens nimmt also der Quotient den vorgeschriebenen Werth ϱ_0' (6 und 10b) an. Da die untersuchte Gruppe höchstens $n+1$ Punkte enthalten kann, so findet sich eben genau ein

Punkt derselben auf jedem Zweige der Halbkette, und dieselbe besteht nur aus diesen $n+1$ Zügen.

Zur Vervollständigung des Beweises sind noch Erörterungen über das Involutionsfeld $(n+1)$ ter Ordnung und Stetigkeitsbetrachtungen nöthig, welche zusammengenommen den Satz enthalten, dafs mit den Coëfficienten die Wurzeln einer Gleichung sich stetig ändern. Dies wird in den §§ 65—70 geleistet.

§ 187. Im § 73 wird geometrisch die Existenz von Schaaren projectivischer Involutionen dargethan.

Die Gleichung

$$1)\qquad u+\lambda v+\mu(\mu_1+\lambda v_1)=0$$

stellt, wenn u, u_1, v, v_1 ganze Functionen $n$ten Grades eines Theilverhältnisses sind, für jeden Werth μ_0 von μ eine bestimmte Involution

$$1a)\qquad u+\mu_0 u_1+\lambda(v+\mu_0 v_1)=0$$

dar. Irgend zwei dieser projectivischen Involutionen besitzen eine und dieselbe Gruppe

$$2)\qquad u v_1-v u_1=0$$

von $2n$ Coincidenzelementen. Wir erhalten so eine Schaar projectivischer Involutionen. Die ebenfalls zu einander projectivischen Leitinvolutionen

$$3)\qquad (u+\lambda_0 v)+\mu(u_1+\lambda_0 v_1)=0$$

entstehen, wenn wir λ specielle Werthe ertheilen, dagegen μ veränderlich lassen.

Verbinden wir eine dritte projectivische Involution

$$4)\qquad w+\lambda w_1=0$$

mit allen Involutionen der Schaar 1), so erhalten wir als Coincidenzgruppen die Glieder

$$5)\qquad u w_1-v w+\mu(u_1 w_1-v_1 w)=0$$

einer Involution $(n+m)$ter Ordnung, welche zu den Leitinvolutionen 3) projectivisch ist (§ 74).

Das dritte Capitel der geometrischen Entwickelungen. §§ 188—192.

§ 188. Es seien $u_1, u_2, u_3, \dots u_{\mu+1}$ binäre Formen gleicher Ordnung, zwischen denen keine lineare Gleichung besteht. Alsdann stellt das allgemeine lineare System

$$l_1 u_1 + l_2 u_2 + l_3 u_3 + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0 \qquad 1)$$

das allgemeinste Netz $U_1 U_2 U_3 \dots U_{\mu+1}$ μter Stufe dar. An die Stelle der Form 1) können wir die identische

$$l_1 u_1 + (l_2 u_2 + l_3 u_3 + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1}) = 0 \qquad 2)$$

treten lassen. Hierdurch wird das Netz in die Gesammtheit der Involutionen aufgelöst, welche die eine Gruppe U_1 mit denen des Netzes $U_2 U_3 \dots U_{\mu+1}$ $(\mu-1)$ter Stufe verbinden. Die Anbringung dieser Klammern zeigt uns also, dafs 1) unser geometrisches Involutionsnetz μter Stufe darstellt (§ 81). Dasselbe kann auch durch Netze αter Stufe eines Netzbündels ausgefüllt werden. Diese Möglichkeit erhellt ebenfalls aus der Anbringung zweier Klammern; wir können nämlich setzen:

$$l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_\alpha u_\alpha + (l_{\alpha+1} u_{\alpha+1} + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1}) = 0\,. \qquad 3)$$

Hier erhalten wir für Specialwerthe von $l_{\alpha+1}, l_{\alpha+2}, \dots l_{\mu+1}$ in der Klammer die Gleichung einer bestimmten Gruppe, und das Ganze stellt die Gleichung eines Netzes αter Stufe dar, das von dem Netze $(\alpha-1)$ter Stufe

$$l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_\alpha u_\alpha = 0 \qquad 4)$$

ausgeht. Das Netz μter Stufe wird von allen Netzen αter Stufe ausgefüllt, die das Netz 4) mit Gruppen des Netzes

$$l_{\alpha+1} u_{\alpha+1} + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0 \qquad 5)$$

$(\mu-\alpha-1)$ter Stufe verbinden. Sind

$$u_1' = 0\,, u_2' = 0\,, \dots u_\alpha' = 0 \qquad 6)$$

die Gleichungen von irgend α Gruppen $U_1', U_2', \dots U_\alpha'$ des Netzes 1), so besteht offenbar die Identität:

$$l_1' u_1' + l_2' u_2' + \cdots l_\alpha' u_\alpha' \equiv l_1'' u_1 + l_2'' u_2 + \cdots l_{\mu+1}'' u_{\mu+1}\,.$$

Das Netz $(\alpha-1)$ter Stufe, das sich aus den α Gruppen 6) zusammensetzen läfst, besteht also nur aus Gruppen des Netzes 1). Ein solches Netz kann noch auf eine zweite Weise definirt werden. Eine Gruppe

7) $$m_1 u_1 + m_2 u_2 + \cdots m_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0$$

gehört zu demselben, wenn für $m_1, m_2, \ldots m_{\mu+1}$ $\mu-\alpha$ von einander unabhängige Gleichungen von der Form

8) $$p_1^{(i)} m_1 + p_2^{(i)} m_2 + \cdots p_{\mu+1}^{(i)} m_{\mu+1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu-\alpha)$$

bestehen. Die Auflösung der Gleichungen 8) führt nämlich auf α Gleichungen von der Form

9) $$m_i = l_1' r_i^{(1)} + l_2' r_i^{(2)} + \ldots l_\alpha' r_i^{(\alpha)}; \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu+1)$$

es besteht daher, wenn noch

$$u_k^0 = r_1^{(k)} u_1 + r_2^{(k)} u_2 + \cdots r_{\mu+1}^{(k)} u_{\mu+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots \alpha)$$

gesetzt wird, wirklich die Identität:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 + \cdots m_{\mu+1} u_{\mu+1} \equiv l_1' u_1^0 + l_2' u_2^0 + \cdots l_\alpha' u_\alpha^0 .$$

Zwei Netze αter und βter Stufe des Netzes μter Stufe haben ein Netz $(\beta+\alpha-\mu)$ter Stufe mit einander gemeinsam, wenn $\alpha+\beta > \mu$ ist. Denn für jede gemeinsame Gruppe bestehen erstens die linearen Gleichungen 8), zweitens noch die β anderen

10) $$q_1^{(k)} m_1 + q_2^{(k)} m_2 + \cdots q_{\mu+1}^{(k)} m_{\mu+1} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots \mu-\beta)$$

im Ganzen also $2\mu-\alpha-\beta$ lineare Gleichungen; die Gruppen füllen daher, wenn $\alpha+\beta$ nicht kleiner als μ ist, ein Netz $(\alpha+\beta-\mu)$ter Stufe aus. Die beiden Netze haben eine Gruppe mit einander gemeinsam, wenn $\alpha+\beta=\mu$ ist.

Für die Coëfficienten einer Gruppe, die s Netzen $\mu_1$ter, $\mu_2$ter, $\ldots$ $\mu_s$ter Stufe zugleich angehört, bestehen $s\mu-\mu_1-\mu_2-\cdots\mu_s$ lineare homogene Gleichungen. Dieselben haben mithin ein Netz der Stufe $\mu_1+\mu_2+\cdots\mu_s-(s-1)\mu$ mit einander gemeinsam, wofern diese Zahl nicht negativ ist.

Zwei Netze gleicher Stufe können collinear bezogen werden. Sind

10a) $l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0$, 10b) $m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots m_{\mu+1} v_{\mu+1} = 0$

entsprechende Gruppen, so bestehen $\mu+1$ lineare Gleichungen

$$m_i = s_1^{(i)} l_1 + s_2^{(i)} l_2 + \cdots s_{\mu+1}^{(i)} l_{\mu+1} = 0. \quad (i = 1, 2, 3, \ldots \mu + 1) \qquad 11)$$

Die $(\mu + 1)^2$ Gröſsen $s_k^{(i)}$ können bestimmt werden, wenn wir irgend $\mu + 2$ Paare entsprechender Gruppen kennen. Sind $U_1, V_1; U_2, V_2; \ldots U_{\mu+1}, V_{\mu+1}$ homologe Paare, so nehmen die Gleichungen entsprechender Gruppen die Formen an:

$$l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0\,, \qquad 12a)$$

$$l_1 v_1 + l_2 v_2 + \cdots l_{\mu+1} v_{\mu+1} = 0\,. \qquad 12b)$$

In den Formen u_λ und v_λ müssen die multiplicativen Constanten richtig bestimmt werden, damit ein $(\mu + 2)$tes Paar entsprechender Gruppen sich ergebe. Durch ein solches Paar aber werden die bezüglichen Constanten auch eindeutig bestimmt, wenn keine $\mu + 1$ der U und keine $\mu + 1$ der V zu einem Netze $(\mu - 1)$ter Stufe angehören.

Wenn die collinearen Netze in einander liegen, können sich selbst entsprechende Gruppen vorkommen. Wir wollen annehmen, daſs $U_1, U_2, \ldots U_{\mu+1}$ mit $V_1, V_2, \ldots V_{\mu+1}$ zusammenfallen; u_λ und $v_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots \mu + 1)$ unterscheiden sich dann nur um Constanten. Die Verhältnisse aller $2(\mu + 1)$ Constanten können bestimmt werden, wenn noch ein Paar entsprechender Gruppen gegeben ist. Soll noch eine andere Gruppe sich selbst entsprechen, die mit keinen μ der vorigen zu einem Netze $(\mu - 1)$ter Stufe gehört, so werden die Constanten der v denen der u proportional, und es fallen je zwei entsprechende Gruppen zusammen.

Collineare Netze können so bezogen werden, daſs sie entsprechend gemeinsame Theilnetze enthalten. Homologe Gruppen haben dann die Gleichungen:

$$l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0\,, \qquad 13a)$$

$$\begin{aligned} &\alpha(l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_i u_i) + \beta(l_{i+1} u_{i+1} + \cdots l_k u_k) + \cdots \\ &\sigma(l_{s+1} u_{s+1} + \cdots l_t u_t) + l_{t+1} v_{t+1} + l_{t+2} v_{t+2} + \cdots l_{\mu+1} v_{\mu+1} = 0\,. \end{aligned} \qquad 13b)$$

Hierbei entsprechen sich selbst die Theilnetze

$$\begin{aligned} l_1 u_1 + \cdots l_i u_i = 0\,,\ l_{i+1} u_{i+1} + \cdots l_k u_k = 0\,, \ldots \\ l_{s+1} u_{s+1} + \cdots l_t u_t = 0\,. \end{aligned} \qquad 14)$$

In einander liegen collineare Netze, die sich aus $U_1, U_2, \ldots U_t$ zusammensetzen.

Die einzelnen Schnitte eines Netzbündels

15) $$l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_\alpha u_\alpha + (l_{\alpha+1} u_{\alpha+1} + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1}) = 0$$

sind unter einander collinear. Die Netze αter Stufe des Bündels 15), welche durch $U_{\alpha+1}, U_{\alpha+2}, \ldots U_{\mu+1}$ bestimmt werden, schneiden auf einem zweiten Netze $(\mu-\alpha)$ter Stufe neue Gruppen $V_{\alpha+1}, V_{\alpha+2}, \ldots V_{\mu+1}$ aus, deren Gleichungen durch passende Constantenbestimmung auf die Form gebracht werden können:

16) $$v_i = m_1^{(i)} u_1 + m_2^{(i)} u_2 + \cdots m_\alpha^{(i)} u_\alpha + u_i = 0. \quad (i = \alpha + 1, \ldots \mu + 1)$$

Das zweite Netzbündel

17) $$l'_1 u_1 + l'_2 u_2 + \cdots l'_\alpha u_\alpha + (l_{\alpha+1} v_{\alpha+1} + l_{\alpha+2} v_{\alpha+2} + \cdots l_{\mu+1} v_{\mu+1}) = 0$$

ist mit dem vorigen (15) identisch, denn das Netz αter Stufe desselben, welches durch die Gruppe

18) $$l_{\alpha+1} v_{\alpha+1} + l_{\alpha+2} v_{\alpha+2} + \cdots l_{\mu+1} v_{\mu+1} = 0$$

bestimmt wird, kann wegen der Gleichungen 16) auf die Form

19) $$n_1 u_1 + n_2 u_2 + \cdots n_\alpha u_\alpha + (l_{\alpha+1} u_{\alpha+1} + l_{\alpha+2} u_{\alpha+2} + \cdots l_{\mu+1} v_{\mu+1}) = 0$$

gebracht werden und enthält daher auch die Gruppe

20) $$l_{\alpha+1} u_{\alpha+1} + l_{\alpha+2} u_{\alpha+2} + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0 .$$

Die Netze $U_{\alpha+1} U_{\alpha+2} \ldots U_{\mu+1}$ und $V_{\alpha+1} V_{\alpha+2} \ldots V_{\mu+1}$ sind mithin zu einander collinear.

Zwei collineare Netze gleicher Ordnung und gleicher Stufe, die aus Gruppen desselben einförmigen Gebildes bestehen, bestimmen eine Schaar collinearer Netze. Sind

21a) $$l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0$$

21b) $$l_1 v_1 + l_2 v_2 + \cdots l_{\mu+1} v_{\mu+1} = 0$$

die Gleichungen der beiden collinearen Netze $U_1 U_2 \ldots U_{\mu+1}$ und $V_1 V_2 \ldots V_{\mu+1}$, so ist

22) $$l_1(u_1 + \lambda v_1) + l_2(u_2 + \lambda v_2) + \cdots l_{\mu+1}(u_{\mu+1} + \lambda v_{\mu+1}) = 0$$

die Gleichung der in Rede stehenden Schaar; offenbar erhält man für jeden Werth von λ ein zu den beiden gegebenen collineares Netz. Betrachtet man andererseits $l_1, l_2, \ldots l_{\mu+1}$ als fest und λ als beweglich, so erhält man aus 22) eine Involution, auf der eine bestimmte Reihe homo-

loger Gruppen $U, V, W, Z, \ldots$ liegt. Alle diese verschiedenen Leitinvolutionen sind zu einander projectivisch.

Die Theoreme, welche wir soeben erläutert haben, sind auf geometrischem Wege in den beiden ersten Abschnitten des dritten Capitels erwiesen worden. Da uns die genaue Darlegung unserer dortigen Beweismethoden hier zu weit führen würde, so genüge die Bemerkung, dafs die Einführung der hochwichtigen Schaaren mit Hülfe ganz derselben Schlüsse gelingt, die in der Geometrie des Raumes auf die Regelflächen führen.

§ 189. Die Involution μten Ranges und $m$ter Ordnung liefert dieselbe Beziehung zwischen den Elementen zweier einförmiger Gebilde, wie eine verschwindende ganze Function

$$f(y, x) = 0, \qquad 1)$$

welche die Theilverhältnisse y und x zusammengehöriger Elemente bis zu den Potenzen m und μ enthält.

Man kann bekanntlich $(\mu + 1)^2$ Constanten $b_k^{(i)}$ so bestimmen, dafs die Gleichungen stattfinden:

$$x_i \equiv (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{\mu+1}) \sum_{k=1}^{\mu+1} \frac{b_k^{(i)}}{x - a_k} \cdot \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots \mu) \quad 2)$$

Man ordne nun $f(y, x)$ nach Potenzen von x und setze für dieselben ihre Werthe aus den Gleichungen 2) ein, so nimmt 1) die Form an:

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{\mu+1}) \sum_{k=1}^{\mu+1} \frac{u_k}{x - a_k} = 0. \qquad 3)$$

Hierin bedeuten $u_1, u_2, \ldots u_{\mu+1}$ Polynome $m$ten Grades in y; sie ergeben, gleich Null gesetzt, die Gleichungen bestimmter Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu+1}$ des vorliegenden Trägers. Jedem Werthe von x, also jedem Element des einen Trägers, gehört eine bestimmte auf dem anderen liegende Gruppe zu; den Werthen $a_1, a_2, \ldots a_{\mu+1}$ entsprechen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu+1}$. Offenbar können die $\mu + 1$ Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu+1}$ ganz willkürlich gewählt werden, und wir verfügen dann noch über die Constanten der u_λ. Bestimmen daher die Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu+1}$ ein Netz μter Stufe, so sind alle wesentlichen Constanten der Form 3) bekannt, wenn für irgend einen Werth x_0 von x eine Gruppe des Netzes $U_1 U_2 \ldots U_{\mu+1}$ gegeben ist, die mit keinen μ der gegebenen Gruppen zu einem Theilnetze $(\mu - 1)$ter Stufe gehört.

Man kann von der Form 1) $\mu + 3$ Gruppen willkürlich geben, wenn man denselben keine bestimmte Stelle anweist, also die Werthe von x offen läfst, denen sie zugehören. Man hat alsdann nicht nur die multiplicativen Constanten der u, sondern auch die Gröfsen $a_1, a_2, \dots a_{\mu+1}$ zur freien Verfügung und kann eben mit ihrer Hülfe zwei neue Gruppen $U_{\mu+2}$ und $U_{\mu+3}$ dem Gebilde anreihen.

Nach unserer geometrischen Anschauung (§ 99) besteht, wenn $U_1 U_2 \dots U_{\mu+3} \dots$ eine Involution $m$ter Ordnung und μten Ranges ist, die Beziehung

$$4)\qquad U_1 U_2 U_3 \dots U_{\mu+3} \dots \barwedge N(U_1 U_2 U_3 \dots U_{\mu+3} \dots)$$

dann immer, wenn N ein aus irgend $\mu - 1$ Gruppen der Involution gebildetes Netz $(\mu - 2)$ter Stufe ist. Die Involution konnte daher auch als Erzeugnifs von μ projectivischen Büscheln aus Netzen $(\mu - 1)$ter Stufe dargestellt werden. Dieselbe ist durch $\mu + 2$ gegebene Gruppen eindeutig bestimmt, welche bestimmten Elementen $a_1, a_2, \dots a_{\mu+2}$ (mit diesen Theilverhältnissen) eines projectivischen einförmigen Gebildes zugewiesen werden. Das Netzbüschel, welches von $U_2 \dots U_\mu$ aus die Involution μten Ranges projicirt, hat die Gleichung:

$$5\text{a})\qquad l_2' u_2 + l_3' u_3 + \cdots l_\mu' u_\mu + \left(\frac{u_1}{x - a_1} + \frac{u_{\mu+1}}{x - a_{\mu+1}}\right) = 0\,.$$

Das Verhältnifs der Constanten in u_1 und $u_{\mu+1}$ wird durch den Umstand bedingt, dafs die zu $a_{\mu+2}$ gehörende Gruppe $U_{\mu+2}$, welche mit keinen μ der gegebenen zu einem Netze $(\mu - 1)$ter Stufe gehört, bekannt ist. Die Gleichung der Gruppe U, die zu dem Werthe x gehört, mufs sich daher in jeder der μ Formen darstellen lassen:

$$5)\qquad \begin{cases} l_2' u_2 + l_3' u_3 + \cdots l_\mu' u_\mu + \left(\frac{u_1}{x - a_1} + \frac{u_{\mu+1}}{x - a_{\mu+1}}\right) = 0\,. \\ l_1'' u_1 + l_3'' u_3 + \cdots l_\mu'' u_\mu + \left(\frac{u_2}{x - a_2} + \frac{u_{\mu+1}}{x - a_{\mu+1}}\right) = 0\,. \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ l_1^{(\mu)} u_1 + l_2^{(\mu)} u_2 + \cdots l_{\mu-1}^{(\mu)} u_{\mu-1} + \left(\frac{u_\mu}{x - a_\mu} + \frac{u_{\mu+1}}{x - a_{\mu+1}}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dafs die Gleichung der Gruppe folgende Form hat

$$\frac{u_1}{x - a_1} + \frac{u_2}{x - a_2} + \cdots \frac{u_{\mu+1}}{x - a_{\mu+1}} = 0\,,$$

oder, wenn man die Nenner entfernt,

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{\mu+1})\left\{\frac{u_1}{x-a_1}+\frac{u_2}{x-a_2}+\cdots\frac{u_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}}\right\}=0\,. \qquad 6)$$

Die allgemeine Involution μten Ranges stellt also geometrisch den Zusammenhang dar, der durch eine rationale Gleichung vermittelt wird, die y bis zur $m$ten, x bis zur μten Potenz enthält.

Neben den eigentlichen Involutionen μten Ranges sind noch die entarteten zu betrachten. Man bringe die Gleichung einer Gruppe U'_λ auf die Form

$$u'_\lambda \equiv u_\lambda + c_1^{(\lambda)}v_1 + c_2^{(\lambda)}v_2 + \cdots c_\alpha^{(\lambda)}v_\alpha = 0\,. \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots \mu + 2) \qquad 7)$$

Die Gruppen $U_1, U_2, \dots U_{\mu+2}$ mögen nur noch ein Netz $(\mu-\alpha-1)$ter Stufe bedingen, die Gruppen $V_1, V_2, \dots V_\alpha$ aber mit demselben ein Netz μter Stufe bestimmen; von den Gruppen $U'_1, U'_2, \dots U'_{\mu+2}$ sollen keine $\mu+1$ demselben Netze $(\mu-1)$ter Stufe angehören. Für eine Involution, in der die letzteren Gruppen den Elementen $a_1, a_2, \dots a_{\mu+2}$ eines einförmigen Gebildes zugewiesen sind, erhalten wir eine Gleichung von der Form:

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{\mu+1})\left\{\frac{u'_1}{x-a_1}+\frac{u'_2}{x-a_2}+\cdots\frac{u'_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}}\right\}=0\,. \qquad 8)$$

Nun projiciren wir jede Gruppe dieser Involution von $V_1 V_2 \dots V_\alpha$ aus auf das ursprüngliche Netz, so bekommen wir nach unserer Definition (§ 106) eine entartete Involution. Jede Gruppe derselben liegt mit einer Gruppe des Zeigers 8) und den Gruppen $V_1, V_2, \dots V_\alpha$ in einem Netze αter Stufe. Die Gleichung 8) stellt sich als eine homogene Function der $v_1, v_2, \dots v_\alpha$, $u_1, u_2, \dots \mu_{\mu+2}$ dar; unterdrückt man die mit den ersteren Factoren $v_1, v_2, \dots v_\alpha$ behafteten Terme, so erhalten wir die Gleichung der entarteten Involution wieder in der Form

$$(x-a_1)\dots(x-a_{\mu+1})\left\{\frac{u_1}{x-a_1}+\frac{u_2}{x-a_2}+\cdots\frac{u_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}}\right\}=0\,; \qquad 9)$$

nur stellen jetzt $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\dots u_{\mu+1} = 0$ Gruppen $U_1, U_2, \dots U_{\mu+1}$ dar, welche demselben Netze $(\mu-\alpha)$ter Stufe angehören.

Es ist umgekehrt klar, dafs die Gleichung 9) oder 6), wie auch immer die Formen $u_1, u_2, \dots u_{\mu+1}$ $m$ten Grades beschaffen sind, entweder eine allgemeine Involution μten Ranges $U_1 U_2 U_3 \dots U_{\mu+2} \dots$ bestimmt, die zu

einem einförmigen Gebilde $a_1 a_2 a_3 \dots a_{\mu+2} \dots$ projectivisch ist, oder eine entartete Involution μten Ranges, deren Zeiger zu jenem einförmigen Gebilde projectivisch ist.

Interessant ist noch der Fall, wo das Netz $V_1 V_2 \dots V_\beta$ mit der Zeigerinvolution β Gruppen, sagen wir die Gruppen $U_1', U_2', \dots U_\beta'$ gemeinsam hat. Alsdann sind in 8) $u_1', u_2', \dots u_\beta'$ homogene lineare Functionen der $v_1, v_2, \dots v_\alpha$. Bei der Vornahme der Projection verschwinden daher $u_1, u_2, \dots u_\beta$ aus der Gleichung der entarteten Involution. Dieselbe nimmt die Form an:

$$10)\qquad (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\beta)\times$$
$$(x-a_{\beta+1})\dots(x-a_{\mu+1})\left\{\frac{u_{\beta+1}}{x-a_{\beta+1}}+\frac{u_{\beta+2}}{x-a_{\beta+2}}+\dots\frac{u_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}}\right\}=0.$$

Der hinter $\times$ stehende Factor stellt eine allgemeine oder entartete Involution $(\mu-\beta)$ten Ranges $U_{\beta+1} U_{\beta+2} \dots U_{\mu+2} \dots$ dar, welche zu $a_{\beta+1} a_{\beta+2} \dots a_{\mu+2} \dots$ projectivisch ist. Während aber zu allen anderen Werthen von x ganz bestimmte Glieder des Gebildes 10) gehören, so werden die $a_1, a_2, \dots a_\beta$ entsprechenden Gruppen unbestimmt, da die Gleichung durch die blofse Annahme $x = a_1$ z. B. zum Verschwinden gebracht werden kann.

§ 190. Für die Lösung des Eliminationsproblems ist der Begriff der Schaar projectivischer Involutionen sehr wesentlich (§§ 108 ff.).

Sind zwei projectivische Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges gegeben, nämlich

$$1\text{a})\qquad (x-a_1)\dots(x-a_{\mu+1})\left\{\frac{u_1}{x-a_1}+\frac{u_2}{x-a_2}+\dots\frac{u_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}}\right\}=0,$$

$$1\text{b})\qquad (x-a_1)\dots(x-a_{\mu+1})\left\{\frac{v_1}{x-a_1}+\frac{v_2}{x-a_2}+\dots\frac{v_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}}\right\}=0,$$

so erhalten wir aus beiden eine ganze Schaar von der Gleichung:

$$2)\qquad (x-a_1)\dots(x-a_{\mu+1})\left\{\frac{u_1-\lambda v_1}{x-a_1}+\frac{u_2-\lambda v_2}{x-a_2}+\dots\frac{u_{\mu+1}-\lambda v_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}}\right\}=0.$$

Für jeden Werth von λ stellt 2) eine Involution dar, die zu den beiden gegebenen 1a) und 1b) projectivisch ist. Betrachten wir eine Reihe homologer Gruppen, lassen wir λ bei festem x veränderlich, so erhalten wir eine bestimmte Leitinvolution; alle diese Leitinvolutionen sind zu einander und

zur Schaar projectivisch. Enthalten irgend zwei homologe Gruppen $U_\varkappa$, $V_\varkappa$ ein gemeinsames Element, so kommt dasselbe in allen Gruppen von $u_\varkappa - \lambda v_\varkappa = 0$ vor, also in allen zu den gegebenen $U_\varkappa$ und $V_\varkappa$ homologen Gruppen. Irgend zwei Glieder der Schaar ergeben daher dieselbe Coincidenzgruppe. Haben die beiden gegebenen Involutionen irgend eine Gruppe, sagen wir U_1, entsprechend gemein, so ist identisch

$$u_1 - \lambda_0 v_1 = 0\,, \qquad 3)$$

da sich u_1 und v_1 nur um eine multiplicative Constante unterscheiden können; wir erhalten dann für die zu λ_0 gehörende Involution μten Ranges die Gleichung

$$(x-a_1) \times (x-a_2) \ldots (x-a_{\mu+1}) \left\{ \frac{u_2 - \lambda_0 v_2}{x-a_2} + \cdots \frac{u_{\mu+1} - \lambda_0 v_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}} \right\} = 0\,, \quad 4)$$

das heifst, ihr wesentlicher Bestandtheil ist eine projectivische Involution $(\mu-1)$ten Ranges. Dazu kommt eine völlig unbestimmte Gruppe, die dem Werthe a_1 von x entspricht. Die Involution $(\mu-1)$ten Ranges enthält alle Coincidenzstellen von 1a) und 1b) mit Ausnahme derer, die durch die Angaben

$$x = a_1\,,\ u_1 = 0 \qquad 5)$$

bestimmt werden.

Es mögen nunmehr zwei projectivische Involutionen $m$ter Ordnung, $(\mu-\alpha)$ten und $(\mu-\beta)$ten Ranges gegeben sein, deren Gleichungen wir der Kürze halber mit $f(y,x) = 0$ und $g(y,x) = 0$ bezeichnen wollen. Alsdann ist

$$(x-a_{\beta+1}) \ldots (x-a_{\beta+\alpha}) f(y,x) - \lambda (x-a_1) \ldots (x-a_\beta) g(y,x) = 0 \qquad 6)$$

die Gleichung einer Schaar projectivischer Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges. Die gegebenen Involutionen sind wesentliche Bestandtheile zweier Individuen derselben, mit der ersten Involution haben alle Glieder der Schaar die Gruppen gemeinsam, welche zu $a_1, a_2, \ldots a_\beta$ gehören, mit der zweiten Involution dagegen die Gruppen, die zu $a_{\beta+1}$, $a_{\beta+2}, \ldots a_{\beta+\alpha}$ gehören.

Verbindet man mit allen Gliedern der Schaar 2) eine projectivische Involution $Z_1 Z_2 Z_3 \ldots$ $n$ter Ordnung, ersten Ranges, deren Gleichung man auf die μ Formen bringen kann

$$z_{\mu+1}(x-a_\lambda) - z_\lambda (x-a_{\mu+1}) = 0\,, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \mu) \quad 7)$$

so erhält man durch Elimination von x die Gleichung für y:

8) $$z_1 z_2 \dots z_\mu z_{\mu+1} \left\{ \frac{u_1 - \lambda v_1}{z_1} + \frac{u_2 - \lambda v_2}{z_2} + \dots \frac{u_{\mu+1} - \lambda v_{\mu+1}}{z_{\mu+1}} \right\} = 0 .$$

Also hat die Involution 7) ersten Ranges mit den Gliedern der Schaar 2) die Gruppen einer Involution $(m + n\mu)$ter Ordnung gemeinsam. Soll die Gleichung der Schaar 2) speciell in die Form 6) übergehen, so haben wir in ihr $u_{\beta+1}, \mu_{\beta+2}, \dots u_{\beta+\alpha}$ und $v_1, v_2, \dots v_\beta$ zu unterdrücken; alsdann löst sich für $\lambda = 0$ von 8) der Factor

9) $$z_{\beta+1} z_{\beta+2} \dots z_{\beta+\alpha} = 0$$

ab, für $\lambda = \infty$ löst sich der Factor

10) $$z_1 z_2 \dots z_\beta = 0$$

von derselben ab. Stellen also $u = 0$ und $v = 0$ die Coincidenzgruppen der Involutionen $f(y, x) = 0$ und $g(y, x) = 0$ mit der Involution 7) ersten Ranges dar, so hat sie mit den anderen Gliedern von 6) Gruppen der Involution

11) $$z_{\beta+1} z_{\beta+2} \dots z_{\beta+\alpha} u - \lambda z_1 z_2 \dots z_\alpha v = 0$$

gemeinsam.

Es seien nun die beiden projectivischen Schaaren

12a) $$\phi(y, x) - \lambda \psi(y, x) = 0 ,$$

12b) $$\phi_1(y, x) - \lambda \psi_1(y, x) = 0 ,$$

bestehend aus projectivischen Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges, gegeben; alsdann stellt die Gleichung

13) $$\phi(y, x) - \lambda \psi(y, x) + \varrho \{\phi_1(y, x) - \lambda \psi_1(y, x)\} = 0$$

für jedes Werthepaar λ, ϱ eine bestimmte Involution $m$ter Ordnung und μten Ranges dar. Hält man nur ϱ fest, so erhält man irgend eine zu den beiden gegebenen projectivische Schaar. Giebt man dem λ specielle Werthe, so erhält man eine zweite Reihe unter sich projectivischer Schaaren aus projectivischen Involutionen. Jede einzelne dieser neuen Schaaren verbindet homologe Involutionen in der ersteren Reihe von Schaaren. Haben die beiden Schaaren 12a) und 12b) eine Involution entsprechend gemeinsam, besteht etwa die Identität

14a) $$\phi(y, x) - \varkappa_0 \phi_1(y, x) \equiv 0 ,$$

so gehört die Involution

$$\psi(y,x) - \varkappa_0 \psi_1(y,x) = 0 \qquad 14b)$$

zu einer Schaar mit je zwei entsprechenden Involutionen der gegebenen Schaaren. Sind

$$\mathfrak{f}(y,x) = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{g}(y,x) = 0 \qquad 15)$$

die Gleichungen zweier projectivischer Involutionen $m$ter und $n$ter Ordnung, μten und νten Ranges, so ist

$$\mathfrak{f}(y,x) \cdot \mathfrak{g}(y,x) = 0 \qquad 16)$$

die Gleichung einer speciellen Involution $(m+n)$ter Ordnung, $(\mu+\nu)$-ten Ranges, die zu den beiden gegebenen projectivisch ist. Irgend eine Gruppe derselben setzt sich aus den beiden homologen der ersteren Involutionen zusammen.

Besteht von den beiden projectivischen Schaaren

$$f_1(y,x) - \lambda f_2(y,x) = 0\,, \qquad 17a)$$

$$g_1(y,x) - \lambda g_2(y,x) = 0 \qquad 17b)$$

die eine aus Involutionen $m$ter Ordnung, μten Ranges, die zweite aus projectivischen Involutionen $n$ter Ordnung, νten Ranges, so besteht jede Gruppe der Involution

$$f_1(y,x) g_2(y,x) - f_2(y,x) g_1(y,x) = 0 \qquad 18)$$

$(m+n)$ter Ordnung, $(\mu+\nu)$ten Ranges aus den Coincidenzelementen zweier homologer Leitinvolutionen der Schaaren 17a) und 17b).

In der Hauptsache beruhen die geometrischen Beweise des soeben Dargelegten auf Folgendem. Wenn die beiden Involutionen 1a) und 1b) allgemein sind, so sind sie homologe Bestandtheile collinearer Netze

$$l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0\,, \qquad 19a)$$

$$l_1 v_1 + l_2 v_2 + \cdots l_{\mu+1} v_{\mu+1} = 0\,. \qquad 19b)$$

Um homologe Gruppen der Involutionen zu erhalten, mufs man

$$l_i = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_{\mu+1}) \qquad 20)$$
$$(i = 1,2,3,\ldots \mu+1)$$

setzen. Die Schaar, welche die beiden Involutionen alsdann bestimmen, wird so als ein Bestandtheil derjenigen erkannt, welche durch 19a) und 19b) bedingt ist. Indem man von irgend einem Netze N aus eine

solche Involutionsschaar projicirt, erhält man andere, die durch entartete Involutionen bestimmt werden. Indem man das projicirende Netz durch α Gruppen der einen und durch β Gruppen der zweiten eigentlichen Involution legt, erhält man eine Schaar mit der Gleichung 6).

Dafs die Schaaren auf diese Art eindeutig bestimmt werden, folgt aus der in 8) ausgesprochenen Eigenschaft. Diese wieder läfst sich geometrisch erweisen, nachdem das Gebilde 13) als vorhanden nachgewiesen ist. Wenn man annimmt, dafs die Schaaren 12a) und 12b) aus allgemeinsten Involutionen μten Ranges bestehen, so kann man auf e i n e Art die Netze $(2\mu+1)$ter Stufe, durch die sie sich erstrecken, collinear so beziehen, dafs je zwei homologe Involutionen einander entsprechen (§ 110). Von der Schaar collinearer Netze $(2\mu+1)$ter Stufe, die durch diese beiden Träger bestimmt wird, ist das Gebilde mit der Gleichung 13) ein Bestandtheil. Durch Anwendung geeigneter Projectionen im Gebiete des Gesammtnetzes kann man zuerst auf den Specialfall (14a und 14b) kommen, wo die Schaaren 12a) und 12b) eine Involution entsprechend gemeinsam haben, und zweitens auf den Fall, wo die eine Schaar im Wesentlichen aus Involutionen niederer Ordnung sich zusammensetzt. Die richtige Anwendung dieses letzteren Falles ermöglicht es uns, den in 8) ausgesprochenen Satz mittels eines Schlusses von $m+n, \mu-1$ auf m, μ zu erhärten (§ 111).

Um zu zeigen, dafs 16) eine zu den Involutionen 15) projectivische Involution $(m+n)$ter Ordnung, $(\mu+\nu)$ten Ranges ist, stellen wir (§ 112) $\mathfrak{g}(y,x)$ in der Form dar:

$$21)\qquad \mathfrak{g}(y,x) \equiv (x-a_1)\mathfrak{g}'(y,x) - \lambda_0(x-a_2)\mathfrak{g}''(y,x),$$

wo $\mathfrak{g}'(y,x)$ und $\mathfrak{g}''(y,x)$ x nur bis zur $(\nu-1)$ten Potenz enthalten. Es wird vorausgesetzt, dafs

$$21\text{a)}\quad \mathfrak{f}(y,x)\cdot\mathfrak{g}'(y,x) = 0 \quad\text{und}\quad 21\text{b)}\quad \mathfrak{f}(y,x)\cdot\mathfrak{g}''(y,x) = 0$$

Involutionen $(m+n)$ter Ordnung und $(\mu+\nu-1)$ten Ranges darstellen. Es wird alsdann, wesentlich mit Hülfe von 8), gezeigt, dafs die zu λ_0 gehörende Involution der Schaar

$$22)\qquad (x-a_1)\mathfrak{f}(y,x)\mathfrak{g}'(y,x) - \lambda(x-a_2)\mathfrak{f}(y,x)\mathfrak{g}''(y,x) = 0,$$

welche 21a) und 21b) bestimmen, in die beiden Involutionen 15) zerfällt.

Die in 17a), 17b) und 18) ausgesprochene Wahrheit folgte geometrisch aus der Betrachtung der beiden Gleichungen

$$g_1(y, x) f_1(y, x) - \lambda g_1(y, x) f_2(y, x) = 0, \qquad 23a)$$

$$f_1(y, x) g_1(y, x) - \lambda f_1(y, x) g_2(y, x) = 0. \qquad 23b)$$

Da die Schaaren 23a) und 23b) eine Involution mit einander entsprechend gemeinsam haben, so liegt eine andere Involution mit je zwei homologen Gliedern in je einer Schaar. Das kann aber nur

$$f(y, x) g_1(y, x) - f_1(y, x) g(y, x) = 0 \qquad 24)$$

sein, deren Gruppen aus den Coincidenzelementen je zweier homologer Leitinvolutionen bestehen.

§§ 191 und 192. Das Problem der Elimination.

§ 191. Von den beiden ganzen Functionen

$$f(y, x) \quad , \quad g(y, x) \qquad 1)$$

sei die eine vom $m$ten, die andere vom $n$ten Grade in y; x mögen beide bis zur μten Potenz enthalten. Behufs Aufsuchung der gemeinsamen Nullstellen betrachte man die Function

$$g(y, x_0) f(y, x) - \lambda f(y, x_0) g(y, x) \equiv h_\lambda(y, x). \qquad 2)$$

Für alle Stellen, für welche die Functionen 1) verschwinden, verschwindet nothwendig auch $h_\lambda(y, x)$. Setzen wir aber umgekehrt

$$h_\lambda(y, x) = 0 \quad \text{und} \quad g(y, x) = 0, \qquad 3)$$

so folgt aus 2) entweder

$$4a) \; f(y, x) = 0 \quad \text{oder} \quad g(y, x_0) = 0. \qquad 4b)$$

Aufser für die gesuchten Stellen verschwinden also $h_\lambda(y, x)$ und $g(y, x)$ gleichzeitig, wenn auch $g(y, x_0)$ verschwindet. Letzteres findet im Allgemeinen für n verschiedene Werthe $y_1, y_2, \ldots y_n$ statt. Jede der Gleichungen

$$g(y_\lambda, x) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n) \qquad 5)$$

liefert uns aufser x_0 noch $\mu - 1$ andere Werthe von x. Das Gleichungs-

paar 3) giebt uns also neben den gesuchten noch $n\mu$ andere durch 5) bestimmte Stellen. Nun betrachten wir die zu dem Werthe $\lambda = 1$ gehörende Function $h_1(y,x)$. Dieselbe nimmt die Form an:

6) $$(x - x_0) h_1'(y, x) \equiv h_1(y, x).$$

$h_1'(y, x)$ ist vom $(m+n)$ten Grade in y und vom $(\mu-1)$ten Grade in x; offenbar verschwindet $h_1'(y, x)$ für alle gesuchten Coincidenzstellen, und von den der Aufgabe fremden Coincidenzstellen zwischen $g(y, x) = 0$ und $h_\lambda(y, x) = 0$ gehören nur die n Stellen $y = y_\lambda$, $x = x_0$ nicht $h_1'(y,x) = 0$ an. Bezeichnet man mit $\binom{m, \mu}{n, \nu}$ die Anzahl der Stellen, für welche zwei Functionen $m$ten und $n$ten Grades in y, μten und νten Grades in x gleichzeitig verschwinden, so ist

7) $$\binom{m, \mu}{n, \mu} = \binom{m+n, \mu-1}{n \quad , \quad \mu} - n(\mu-1).$$

Enthält von den ganzen Functionen

8) $$\phi(x, y) \quad , \quad \psi(y, x)$$

die eine y bis zur $m$ten und x bis zur μten Potenz, die zweite dagegen y bis zur $n$ten und x bis zur νten Potenz ($\nu < \mu$), so benutzt man eine dritte ganze Function $\psi_1(y,x)$, die y bis zur $r$ten, x aber bis zur $(\mu-\nu)$-ten Potenz enthält. Setzt man

9) $$\psi_1(y,x_0)\psi(y,x_0)\phi(y,x) - \lambda\phi(y,x_0)\psi_1(y,x)\psi(y,x) \equiv \chi_\lambda(y,x),$$

so finden die beiden Gleichungen

10) $$\chi_\lambda(y,x) = 0 \quad , \quad \psi(y,x) = 0$$

erstens dann statt, wenn die beiden Functionen 8) verschwinden, und zweitens, wenn gleichzeitig

11) $$\psi(y, x) = 0 \quad \text{und} \quad \psi_1(y, x_0)\psi(y, x_0) = 0$$

ist. Aus 11) ergeben sich $(n+r)\nu$ Werthepaare, die also von den gemeinsamen Nullstellen der beiden Functionen $\chi_\lambda(y,x)$ und $\psi(y,x)$ abzulösen sind. Für $\lambda = 1$ erhält man

12) $$\chi_1(y, x) \equiv (x - x_0)\chi_1'(y, x).$$

$\chi_1'(y, x)$ verschwindet für alle gesuchten Werthepaare; von den aufserwesentlichen gemeinsamen Nullstellen der $\chi_\lambda(y, x)$ enthält sie nur diejenigen nicht, welche durch die Annahme

$$\psi(y, x_0) = 0$$

sich bestimmen. Nun enthält $\chi_1'(y, x)$ y bis zur $(m+n+r)$ten, x bis zur $(\mu-1)$ten Potenz. Daher besteht die Recursionsformel:

$$\binom{m, \mu}{n, \nu} = \binom{m+n+r, \mu-1}{n \quad , \quad \nu} - (n+r)\nu + n. \qquad 13)$$

Einen speciellen Fall $(r = 0, \nu = \mu)$ dieser Formel erblicken wir in 7). Der Beziehung 13) genügt die Annahme

$$\binom{m, \mu}{n, \nu} = m\nu + n\mu. \qquad 14)$$

Wirklich besteht die Identität:

$$m\nu + n\mu \equiv (m+n+r)\nu + n(\mu-1) - (n+r)\nu + n.$$

Der erste Fall der Formel 14) $(\mu = 1, \nu = 1)$ trifft aufserdem nach unseren früheren Entwickelungen zu.

Von der allgemeinen Zahl gemeinsamer Stellen können in besonderen Fällen einzelne zusammenfallen, andererseits können aber auch die Functionen $\phi(y,x)$ und $\psi(y,x)$ für unendlich viele Stellen gleichzeitig verschwinden. Für alle diese Stellen verschwindet auch $\chi_1'(y,x)$. Setzt man voraus, dafs alsdann $\chi_1'(y,x)$ und $\psi(y, x)$ eine ganze Function von y und x als gemeinsamen Factor enthalten müssen, so folgt dieselbe Thatsache für $\psi(y,x)$ und $\phi(y,x)$. Dieselbe ist wirklich richtig, weil sie für den speciellen Fall feststeht, dafs $\psi(y,x)$ und $\phi(y,x)$ lineare Functionen von x sind. Hieraus folgt insbesondere, dafs es, wofern $g(y, x)$ nicht in Theile zerfällt, nur eine endliche Zahl von Gruppen $g(y, x_0) = 0$ mit mehrfachen Elementen giebt, denn die betreffenden Elemente gehören zu den gemeinsamen Nullstellen der beiden Functionen

$$g(y, x) \text{ und } \frac{\partial}{\partial y}\{g(y, x)\}.$$

Was für x gilt, ist ebenso für y richtig.

Der geometrische Ausdruck für die soeben behandelte Aufgabe ist der, die Coincidenzstellen zwischen zwei Involutionen $m$ter Ordnung, μten Ranges und $n$ter Ordnung, νten Ranges aufzusuchen, welche entweder selbst projectivisch sind, oder zu projectischen Zeigern gehören.

$$\psi_1(y,x_0)\psi(y,x_0)\phi(y,x)=0 \text{ und } \phi(y,x_0)\psi_1(y,x)\psi(y,x)=0$$

sind die Gleichungen zweier projectivischer Involutionen, die eine Gruppe, welche zu x_0 gehört, entsprechend gemeinsam haben. $\chi_\lambda(y,x)=0$ stellt die Involutionen der Schaar dar, welche durch die beiden gegebenen bestimmt wird. In derselben kommt eine Involution vor, die sich im Wesentlichen auf den $(\mu-1)$ten Rang reducirt. Das Auftreten des Factors $(x-x_0)$ auf der rechten Seite von 12) manifestirte sich geometrisch dadurch, dafs sich in ihr keine bestimmte Gruppe als x_0 zugehörig erwies. Da es als eine Grundeigenschaft der Involution μten Ranges erkannt war, mit jedem Netze $(\mu-1)$ter Stufe μ Gruppen gemeinsam zu haben (§ 101), so kam speciell auch jedes Element des Trägers im Allgemeinen in μ verschiedenen Gruppen der Involution vor; wir waren daher im Stande, die oben erläuterte Abzählung auch mit Hülfe geometrischer Methoden (§ 116) zubegründen.

§ 192. Ein besonders wichtiger Fall tritt dann ein, wenn die Function $\phi(y,x)$ und $\psi(y,x)$ des vorigen § nur von der Dimension m und n sind, wobei aber die $m$ten und $n$ten Potenzen von y, die μten und νten Potenzen von x auftreten. Ist $\psi_1(y,x)$ eine Function von der Dimension r und dem Grade $\mu-\nu$ in x, so betrachten wir, wie im § 191, die Function

$$1)\quad (x-x_0)\chi_1'(y,x)\equiv\psi(y,x_0)\psi_1(y,x_0)\phi(y,x)-\phi(y,x_0)\psi(y,x)\psi_1(y,x).$$

Hier ist $\chi_1'(y,x)$ wieder eine Function vom Grade $\mu-1$ in x. Da wir auf der rechten Seite eine Function von der Dimension $m+n+r$ vor uns haben, so ist $\chi_1'(y,x)$ nur von der Dimension $m+n+r-1$, enthält also auch y nur bis zur Potenz $m+n+r-1$. Von den gemeinsamen Nullstellen der Functionen $\phi(y,x)$ und $\chi_1'(y,x)$ sind genau dieselben auszuschliefsen, wie im vorhergegangenen allgemeinen Falle. Man bezeichne nun mit $\begin{Bmatrix} m, \mu \\ n, \nu \end{Bmatrix}$ die Anzahl der Nullstellen mit endlichen y, welche eine Function von der Dimension m und dem Grade μ in x mit einer Function von der Dimension n und dem Grade ν in x gemeinsam hat. Alsdann ist offenbar

$$2)\qquad \begin{Bmatrix} m, \mu \\ n, \nu \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} m+n+r-1, & \mu-1 \\ n, & \nu \end{Bmatrix}-(m+n+r)\nu+n.$$

Dieser Forderung genügt die Function

$$\left\{ \begin{matrix} m, \mu \\ n, \nu \end{matrix} \right\} = m\nu + n\mu - \mu\nu. \qquad 3)$$

Wirklich ist

$$m\nu + n\mu - \mu\nu = (m + n + r - 1)\nu + n(\mu - 1) - (\mu - 1)\nu - (n + r)\nu + n.$$

Überdies ist der erste Fall des Satzes ($\mu = 1$, $\nu = 1$) ganz offenbar richtig. In zwei derartigen Gleichungen

$$u_1 + xu_2 = 0 \quad \text{und} \quad v_1 + xv_2 = 0 \qquad 4)$$

sind u_2 und v_2 zwei Formen $(m-1)$ten, bezüglich $(n-1)$ten Grades in y, u_1 ist vom Grade m und v_1 vom Grade n. Aus diesem Grunde ist

$$u_1 v_2 - v_1 u_2 = 0,$$

das Resultat der Elimination von x aus den Gleichungen 4), nur eine Gleichung $(m + n - 1)$ten Grades.

Nicht ohne Schwierigkeit gelang es uns, für die Eigenschaft einer Function, von gegebener Dimension zu sein, einen geometrischen Ausdruck zu finden. Man bringe eine solche Involution mit der Gleichung

$$\phi(y, x) = 0 \qquad 5)$$

in Verbindung mit allen Involutionen erster Ordnung und ersten Ranges

$$ay + bx + cxy + d = 0. \qquad 6)$$

Man hat dann behufs Elimination in $\phi(y, x)$ überall für x eine lineare gebrochene Function von y einzusetzen. Da x^μ die höchste in $\phi(y, x)$ auftretende Potenz von x ist, so resultirt hieraus eine Gleichung $(m + \mu)$-ten Grades in y. Verschwindet hingegen c, so wird x eine lineare ganze Function von y, und wir erhalten bei ihrer Substitution in $\phi(y, x)$ nur eine Form $m$ten Grades. Wenn also in der Involution erster Ordnung und ersten Ranges 6) der Werth $y = \infty$ dem Werthe $x = \infty$ entspricht, so enthält ihre Coincidenzgruppe mit der Involution 5) μfach das Element $y = \infty$. Diese Eigenschaft diente uns zur Definition der Functionen von gegebener Dimension. Wir gaben dem Problem eine solche besondere Form, daſs es sich um Schnittpunkte gegebener Curvengebilde handelte. Wir betrachteten zu diesem Zwecke (§ 140) y als das Theilverhältniſs,

welches ein von Q ausgehender Strahl q an QR und QP bestimmt, x dagegen als das zu PR und PQ gehörende Theilverhältnifs eines von P ausgehenden Strahles p. Alsdann stellt 5) eine Strahleninvolution dar, von der jede Gruppe mit dem zugehörigen Strahle p sich in m Punkten eines Punktgebildes schneidet. Aus 6) erhält man Strahlen, die sich im Allgemeinen projectivisch bewegen, jedoch perspectivisch, wenn c verschwindet, und 6) eine Gerade darstellt. Da dann μ der Coincidenzstrahlen zwischen den Involutionen 5) und 6) mit $QP(y=\infty)$ zusammenfallen, so besteht unser Curvengebilde aus dem μfach zählenden Strahle QP und aus einem anderen Gebilde $m$ter Ordnung. Den ersteren Bestandtheil betrachteten wir als unwesentlich; wir konnten zeigen, dafs der zweite Theil mit irgend einem μfach zählenden Strahle QP zusammen durch ein Strahlbüschel mit dem Centrum P und eine projectivische Involution $m$ter Ordnung erzeugt werden konnte.

Mit den drei Involutionen

7 a) $$\psi_1(y,x_0)\psi(y,x_0)\phi(y,x)=0,$$

7 b) $$\phi(y,x_0)\psi(y,x)\psi_1(y,x)=0,$$

7 c) $$(x-x_0)\chi_1'(y,x)=0$$

erzeugt das Strahlbüschel mit dem Centrum P im Wesentlichen drei Curven $(m+n+r)$ter Ordnung. Sind U, V, W die drei Gruppen, welche die drei Involutionen mit einem projectivischen Strahlbüschel gemeinsam haben, und ist q_0 der zugehörige Strahl zu demjenigen p_0 mit dem Theilverhältnisse x_0, so sind U, V und Wq_0 drei Gruppen einer Involution $(m+n+r+\mu)$ter Ordnung. Irgend eine Gerade wird daher auch von den drei Curven in einer Involution $(m+n+r)$ter Ordnung geschnitten. Die dritte zerfällt also in den Strahl p_0 und in eine Curve $(m+n+r-1)$-ter Ordnung; die Involution $\chi_1'(y,x)=0$ ist mithin von der Ordnung $m+n+r-1$ und dem Range $\mu-1$. Nachdem dies einmal bewiesen war, konnte die oben bereits beschriebene Abzählungsmethode auch auf geometrischem Wege begründet werden.

Das vierte Capitel der geometrischen Entwickelungen. ***§§ 193—196.***

§ 193. In dem letzten Capitel unserer Arbeit wenden wir nun die bisherigen Resultate auf Curven von gegebener Ordnung an.

Im zweiten Abschnitt stellen wir eine Reihe von Definitionen und Lehrsätzen auf, die sich, wie leicht zu zeigen ist, bei den algebraischen ebenen Curven $n$ter Ordnung vereinigt finden. Ist wieder in einer Ebene ein Dreieck PQR gegeben, und bestimmen wir irgend einen Punkt T durch das Theilverhältniſs x von TP hinsichtlich RP und QP und das zweite Theilverhältniſs y, das TQ an RQ und PQ bestimmt, so besteht für jeden Punkt einer analytisch definirten Curve $n$ter Ordnung eine Gleichung

$$f_n(y, x) = 0 \qquad 1)$$

$n$ter Dimension. Die Curve $n$ter Ordnung kann daher durch ein Strahlbüschel mit beliebigem Centrum P und durch eine projectivische Involution $n$ter Ordnung dargestellt werden (§ 131).

Sind

$$\phi_m(y, x) = 0 \quad \text{und} \quad \phi_{n-m}(y, x) = 0 \qquad 2)$$

die Gleichungen zweier Curven $m$ter und $(n-m)$ter Ordnung, so ist

$$\phi_m(y, x) \cdot \phi_{n-m}(y, x) = 0 \qquad 3)$$

eine Gleichung $n$ter Dimension; die Gesammtheit beider Curven kann als eine Curve $n$ter Ordnung betrachtet werden (§ 132).

Die beiden Curven 1) und 2a) haben stets Schnittpunkte mit einander gemeinsam, im Allgemeinen und höchstens aber mn verschiedene (§ 133).

Die Gleichung

$$\psi_n^{(1)}(y, x) - \lambda \psi_n^{(2)}(y, x) = 0 \qquad 4)$$

stellt für jeden Werth von λ eine bestimmte Curve $n$ter Ordnung dar. Alle diese Curven haben dieselben Schnittpunkte mit einander gemein und gehören zu einem Büschel. Offenbar schneidet dasselbe auf jeder Geraden

$$ax + by + d = 0 \qquad 5)$$

eine Involution $n$ter Ordnung aus. Die Gleichung der Strahleninvolution, welche dieselbe von Q aus projicirt, erhält man durch Elimination von x aus 4) und 5). Eliminirt man y zwischen 4) und der Gleichung

$$a_1 x + b_1 y + c_1 xy + d_1 = 0 \qquad 6)$$

eines P und Q enthaltenden Kegelschnittes, so erhält man eine Gleichung von der Form

6a) $$g(y) + \lambda g_1(y) = 0,$$

wo $g(y)$ und $g_1(y)$ ganze Functionen $2n$ten Grades sind. Ein Büschel von Curven $n$ter Ordnung schneidet also, da P und Q willkürliche Punkte der Ebene sind, Geraden und Kegelschnitte in zu einander projectivischen Involutionen $n$ter und $2n$ter Ordnung (§ 135).

Das Curvennetz μter Stufe hat die Gleichung:

7) $$\lambda_1 \phi_n^{(1)}(y, x) + \lambda_2 \phi_n^{(2)}(y, x) + \cdots \lambda_{\mu+1} \phi_n^{(\mu+1)}(y, x) = 0.$$

Es gelten von ihm, wie von jedem Netze, die allgemeinen Eigenschaften, welche wir bei dem Involutionsnetz hervorhoben (§ 137).

Die Gleichung

8) $$\mathfrak{f}_n^{(1)}(y, x) + \lambda \mathfrak{f}_n^{(2)}(y, x) + \mu \{\mathfrak{g}_n^{(1)}(y, x) + \lambda \mathfrak{g}_n^{(2)}(y, x)\} = 0$$

stellt eine Schaar projectivischer Büschel dar. Für specielle Werthe von μ erhalten wir einzelne projectivische Büschel derselben. Wenn wir andererseits λ specielle Werthe ertheilen, so resultiren projectivische Büschel, die aus homologen Curven der früheren Büschel sich zusammensetzen. Der Schnitt der Curvenschaar mit irgend einer Geraden ist eine Involutionsschaar (§ 138).

Zwei projectivische Büschel

9a) $$\mathfrak{f}_m^{(1)}(y, x) - \lambda \mathfrak{f}_m^{(2)}(y, x) = 0,$$

9b) $$\mathfrak{g}_{n-m}^{(1)}(y, x) - \lambda \mathfrak{g}_{n-m}^{(2)}(y, x) = 0$$

erzeugen eine Curve $n$ter Ordnung mit der Gleichung

10) $$\mathfrak{f}_m^{(1)}(y, x)\mathfrak{g}_{n-m}^{(2)}(y, x) - \mathfrak{f}_m^{(2)}(y, x)\mathfrak{g}_{n-m}^{(1)}(y, x) = 0,$$

auf der sich homologe Curven der beiden Büschel durchschneiden. Andererseits kann jede Curve $n$ter Ordnung $f_n(y, x) = 0$ als Erzeugniſs projectivischer Büschel dargestellt werden. Sind nämlich

11) $$f_1^{(1)}(y, x) = 0 \quad , \quad f_1^{(2)}(y, x) = 0$$

die Gleichungen von zwei Geraden, die sich auf der gegebenen Curve schneiden, und stellt

11b) $$f_{n-1}^{(1)}(y, x) = 0$$

eine Curve dar, welche die übrigen Schnittpunkte der ersteren Geraden mit der gegebenen Curve $f_n(y, x) = 0$ enthält, so hat man

$$f_n(y, x) \equiv f_1^{(1)}(y, x) f_{n-1}^{(2)}(y, x) - f_1^{(2)}(y, x) f_{n-1}^{(1)}(y, x), \qquad 12)$$

und die Gleichung der gegebenen Curve entsteht bei der Elimination von λ zwischen den Gleichungen

$$f_1^{(1)}(y,x) - \lambda f_1^{(2)}(y,x) = 0, \qquad 13\,a)$$

$$f_{n-1}^{(1)}(y,x) - \lambda f_{n-1}^{(2)}(y,x) = 0 \qquad 13\,b)$$

zweier projectivischer Büschel (§ 130).

Es sei

$$\phi_m^{(1)}(y, x) - \lambda \phi_m^{(2)}(y, x) = 0 \qquad 14)$$

ein Büschel von Curven $m$ter Ordnung, das zu den einzelnen Büscheln einer Schaar

$$\phi_{n-m}^{(1)}(y, x) - \lambda \phi_{n-m}^{(2)}(y, x) + \varrho \{(\psi_{n-m}^{(1)}(y, x) - \lambda \psi_{n-m}^{(2)}(y, x)\} = 0 \quad 15)$$

projectivisch ist. Die Erzeugnisse des ersteren Büschels mit den letzteren bilden ein drittes Büschel

$$\phi_m^{(1)}(y, x) \phi_{n-m}^{(2)}(y, x) - \phi_m^{(2)}(y, x) \phi_{n-m}^{(1)}(y, x) \qquad 16)$$
$$+ \varrho \{\phi_m^{(1)}(y, x) \psi_{n-m}^{(2)}(y, x) - \phi_m^{(2)}(y, x) \psi_{n-m}^{(1)}(y, x)\} = 0,$$

welches zu den Leitbüscheln der Schaar 15) projectivisch ist. Da zwei gegebene Curven $n$ter Ordnung wenigstens einen Punkt gemeinsam haben, so kann man stets ein Strahlbüschel finden, das mit den Curvenbüscheln einer Schaar die Curven des gegebenen Büschels erzeugt ($m = 1$) (§ 135).

Hiermit ist bewiesen, dafs die Definitionen und Lehrsätze des zweiten Abschnittes unseres Capitels die in der analytischen Geometrie bekannten algebraischen Curven $n$ter Ordnung betreffen.

§§ 194—195. Wir wollen in den beiden folgenden §§ einige der Schlüsse von n auf $n+1$ erläutern, die den Inhalt des dritten Abschnittes des vierten Capitels bilden.

§ 194. Es sei eine Curve $(n+1)$ter Ordnung definirt als Erzeugnifs zweier projectivischer Büschel.

$$f_{m+1}(y, x) - \varrho g_{m+1}(y, x) = 0, \qquad 1\,a)$$

$$f_{n-m}(y, x) - \varrho g_{n-m}(y, x) = 0 \qquad 1\,b)$$

aus Curven $(m+1)$ter und $(n-m)$ter Ordnung. An die Stelle dieser Gleichungen kann man die drei folgenden treten lassen:

2a) $$\phi_1^{(1)}(y,x)-\lambda\phi_1^{(2)}(y,x)=0,$$

2b) $$f_m^{(1)}(y,x)-\varrho g_m^{(1)}(y,x)-\lambda\{f_m^{(2)}(y,x)-\varrho g_m^{(2)}(y,x)\}=0,$$

2c) $$f_{n-m}(y,x)-\varrho g_{n-m}(y,x)=0.$$

Hierbei sollen die beiden Geraden $\phi_1^{(1)}(y,x)=0$ und $\phi_1^{(2)}(y,x)=0$ sich in einem (sicher vorhandenen) Grundpunkt des Büschels 1a) treffen. Die Formen $g_m^{(1)}(y,x)$, $g_m^{(2)}(y,x)$, $f_m^{(1)}(y,x)$, $f_m^{(2)}(y,x)$ müssen und können so bestimmt werden, dafs die Identitäten bestehen:

3a) $$f_{m+1}(y,x)\equiv\phi_1^{(1)}(y,x)f_m^{(2)}(y,x)-\phi_1^{(2)}(y,x)f_m^{(1)}(y,x),$$

3b) $$g_{m+1}(y,x)\equiv\phi_1^{(1)}(y,x)g_m^{(2)}(y,x)-\phi_1^{(2)}(y,x)g_m^{(1)}(y,x).$$

Anstatt nun aus 2a) und 2b) zuerst λ zu eliminiren, was uns auf die Gleichungen 1a) und 1b) führen würde, kann man zunächst aus 2b) und 2c) ϱ eliminiren. Der Curvengleichung äquivalent ist also das neue Paar:

4a) $$\phi_1^{(1)}(y,x)-\lambda\phi_1^{(2)}(y,x)=0,$$

4b) $$f_m^{(1)}(y,x)g_{n-m}(y,x)-g_m^{(1)}(y,x)f_{n-m}(y,x)$$
$$-\lambda\{f_m^{(2)}(y,x)g_{n-m}(y,x)-g_m^{(2)}(y,x)f_{n-m}(y,x)\}=0.$$

Diese analytischen Operationen erläutern das im § 143 eingeschlagene Verfahren. Ist eine Curve gegeben, die durch zwei Büschel von Curven $(m+1)$ter und $(n-m)$ter Ordnung erzeugt wird, so sind die Curven des ersten Büschels die Erzeugnisse eines Strahlbüschels 2a) mit den Curvenbüscheln einer Schaar 2b). Die Leitbüschel derselben, die man für specielle λ erhält, sind zu den Büscheln 1a) und 1b) oder 2c) projectivisch. Die ersteren erzeugen folglich mit dem Büschel 2c) die Curven $n$ter Ordnung eines Büschels 4b), welches zu den Büscheln der Schaar 2b) und also auch zu dem Strahlbüschel 2a) oder 4a) projectivisch ist.

Eine durch irgend zwei projectivische Büschel erzeugte Curve $(n+1)$ter Ordnung ist also auch das Erzeugnifs eines Strahlbüschels und eines projectivischen Büschels von Curven $n$ter Ordnung.

Es sei $n-m$ nicht kleiner als $m+1$ und

$$\chi_{n-2m-1}(y\,,x) = 0 \qquad 5)$$

die Gleichung irgend einer Curve $(n-2m-1)$ter Ordnung. Alsdann ist

$$\chi_{n-2m-1}(y,x)\{f_{m+1}(y,x)-\varrho g_{m+1}(y,x)\} + \nu\{f_{n-m}(y,x)-\varrho \phi_{n-m}(y,x)\} = 0 \quad 6)$$

die Gleichung einer speciellen Schaar von projectivischen Büscheln aus Curven $(n-m)$ter Ordnung, die im § 145 betrachtet wird. Je die homologen Curven, die man bei Fixirung von ϱ erhält, schneiden auf der zugehörigen Curve

$$f_{m+1}(y\,,x) - \varrho g_{m+1}(y\,,x) = 0$$

dieselbe Punktgruppe aus; es kann also unsere vorliegende Curve durch das Büschel 1a) und irgend ein Büschel der Schaar 6) erzeugt werden. Weil die Curve $\chi_{n-2m-1}(y,x) = 0$ ganz willkürlich war, so konnten wir im Allgemeinen beliebig $\frac{(n-2m)(n-2m+1)}{2}$ Punkte der Curve $(n+1)$ter Ordnung auswählen, welche Grundpunkte des Büschels 1b) werden sollten.

Einen dieser Punkte können wir nun, wie wir weiter oben gesehen haben, zum Centrum eines Strahlbüschels machen, das zunächst mit einem, dann mit unendlich vielen Büscheln von Curven $n$ter Ordnung die vorliegende Curve erzeugt.

§ 195. Die beiden Gleichungen

$$f_{m+1}(y\,,x) - \mu g_{m+1}(y\,,x) = 0\,, \qquad 1a)$$

$$f_{n-m}(y\,,x) - \mu g_{n-m}(y\,,x) = 0 \qquad 1b)$$

des § 194 können auch in folgender Weise interpretirt werden: Jede Curve des ersten Büschels ist das Erzeugnifs eines festen Strahlbüschels mit dem Centrum P und einer projectivischen Strahleninvolution $(m+1)$ter Ordnung und $(m+1)$ten Ranges mit dem Centrum Q, die zu einer bestimmten Schaar gehört. Ähnliches gilt für das zweite Büschel. Hier erhält man Strahleninvolutionen $(n-m)$ter Ordnung und $(n-m)$ten Ranges mit demselben Centrum Q, die mit dem vorigen Strahlbüschel P die Curven $(n-m)$ter Ordnung erzeugen und zu einer Schaar gehören. Die beiden Schaaren sind projectivisch, und homologe Leitinvolutionen derselben projiciren die Involutionen, welche die beiden Büschel 1a) und

1b) auf irgend einem Strahle des Büschels P ausschneiden. Die Gruppe aus $n+1$ Punkten, welche das Erzeugnifs von 1a) und 1b) auf dem Strahle p mit dem Theilverhältnifs x ausschneidet, wird projicirt durch das Erzeugnifs der beiden entsprechenden Leitinvolutionen. Also ist (§ 118 bezw. § 190, 18) die Curve $(n+1)$ter Ordnung das Erzeugnifs eines Strahlbüschels mit beliebigem Centrum P und einer projectivischen Strahleninvolution $(n+1)$ter Ordnung und $(n+1)$ten Ranges mit willkürlichem Centrum Q. Da man nun, von irgend zwei Punkten P und Q ausgehend, für zwei Curven $(n+1)$ter und $m$ter Ordnung solche Erzeugungsweisen besitzt, so hat man zur Aufsuchung ihrer gemeinsamen Punkte das Theorem des § 192 in Anwendung zu bringen. Man erfährt so, dafs die beiden Curven im Allgemeinen $(n+1)m$ Schnittpunkte mit einander gemeinsam haben, und dafs unter allen Umständen solche vorhanden sind. Ist dies einmal gezeigt, so ist nach den Entwickelungen der §§ 193 und 194 unmittelbar klar, dafs auch rein geometrisch ein Büschel von Curven $(n+1)$-ter Ordnung als Erzeugnifs eines festen Strahlbüschels mit den projectivischen Büscheln mannigfaltiger Schaaren definirt werden kann, und dafs dasselbe zu den Leitinvolutionen aller dieser Schaaren projectivisch gesetzt werden kann.

Ein Curvennetz μter Stufe wird geometrisch vorzugsweise aus der Thatsache heraus untersucht, dafs es Geraden in collinearen Involutionsnetzen μter Stufe trifft.

Die Schaar projectivischer Curvenbüschel verhält sich zu dem allgemeinen Curvennetze dritter Stufe wie die Regelschaar zu dem Raume.

§ 196. Wir wollen zum Schlusse die Methode analytisch erläutern, mit deren Hülfe wir im § 178 die Aufgabe gelöst haben, eine Curve $(n+1)$ter Ordnung durch die $\frac{1}{2}(n+1)(n+4)$ Punkte

$$O;B_1,B_2,\dots B_{\frac{1}{2}n(n+1)};A_1,A_2,\dots A_n;A_{2n+1};A_{n+1},A_{n+2},\dots A_{2n}$$

zu legen.

Wir verlegen in den Punkt O die Ecke P des Coordinatensystems, während die beiden anderen willkürlich bleiben. Durch $B_1, B_2, \dots B_{\frac{1}{2}n(n+1)}$ läfst sich ein $n$faches Netz von Curven $n$ter Ordnung legen; wir geben dasselbe durch die $n+1$ Curven

$1) f_n(y,x) = 0,\ 1a) f_n^{(1)}(y,x) = 0,\ 1b) f_n^{(2)}(y,x) = 0, \ldots\ 1n) f_n^{(n)}(y,x) = 0,$

welche der Reihe nach durch die Punktgruppen

$A_1 A_2 \ldots A_n,\ A_{2n+1} A_2 A_3 \ldots A_n,\ A_{2n+1} A_3 \ldots A_n A_1, \ldots A_{2n+1} A_1 A_2 \ldots A_{n-1}$

bestimmt werden. Aus diesem Netze haben wir das Curvenbüschel auszuwählen, welches mit dem Strahlbüschel P unsere Curve erzeugt. Wenn wir uns die Verfügung über die multiplicativen Constanten der $f_n^{(\lambda)}(y, x)$ aufbehalten, so können wir der Gleichung der gesuchten Curve folgende allgemeine Form geben:

$$(x-\lambda) f_n(y, x) + (x-\lambda_1) f_n^{(1)}(y, x) + \cdots (x-\lambda_n) f_n^{(n)}(y, x) = 0. \quad 2)$$

Den Strahlen $PR(x=0)$ und $PQ(x=\infty)$ gehören die Curven

$$\lambda f_n(y, x) + \lambda_1 f_n^{(1)}(y, x) + \cdots \lambda_n f_n^{(n)}(y, x) = 0, \qquad 3a)$$

$$f_n(y, x) \quad + f_n^{(1)}(y, x) \quad + \cdots f_n^{(n)}(y, x) \quad = 0 \qquad 3b)$$

zu. Die Curve $n$ter Ordnung, die dem Strahle $x = a$ des Büschels A oder P zugehört, bekommen wir aus 2) bei Substitution von a in $(x-\lambda_1)$, $(x-\lambda_2), \ldots (x-\lambda_n)$. Jetzt soll die Curve $(n+1)$ter Ordnung die Punkte $A_1; A_2; \ldots A_n; A_{2n+1}$ oder

$x = a_1, y = b_1; x = a_2, y = b_2; \ldots x = a_n, y = b_n; x = a_{2n+1}, y = b_{2n+1}$

enthalten. Für die Coordinaten a_i, b_i findet von den $n+1$ Gleichungen 1) bis $1n$) nur $1i$) nicht statt. Infolgedessen ergiebt sich

$$(a_i-\lambda_i) f_n^{(i)}(b_i, a_i) = 0, \ \lambda_i = a_i. \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

Für die Coordinaten a_{2n+1}, b_{2n+1} verschwindet allein $f_n(y, x)$ nicht, man erhält also

$$\lambda = a_{2n+1}.$$

Statt 2) können wir die schon viel speciellere Form

$$(x-a_{2n+1}) f_n(y, x) + (x-a_1) f_n^{(1)}(y, x) + \cdots (x-a_n) f_n^{(n)}(y, x) = 0 \quad 4)$$

substituiren. Für die multiplicativen Constanten der $f_n^{(i)}(y, x)$ bestehen die n folgenden Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} (a_{n+1}-a_{2n+1})f_n(b_{n+1}, a_{n+1}) + (a_{n+1}-a_1)f_n^{(1)}(b_{n+1}, a_{n+1}) \\ \qquad + \cdots (a_{n+1}-a_n)f_n^{(n)}(b_{n+1}, a_{n+1}) = 0. \\ (a_{n+2}-a_{2n+1})f_n(b_{n+2}, a_{n+2}) + (a_{n+2}-a_1)f_n^{(1)}(b_{n+2}, a_{n+2}) \\ \qquad + \cdots (a_{n+2}-a_n)f_n^{(n)}(b_{n+2}, a_{n+2}) = 0. \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (a_{2n}-a_{2n+1})f_n(b_{2n}, a_{2n}) + (a_{2n}-a_1)f_n^{(1)}(b_{2n}, a_{2n}) \\ \qquad + \cdots (a_{2n}-a_n)f_n^{(n)}(b_{2n}, a_{2n}) = 0. \end{cases}$$

Denn unsere Curve soll die Punkte $x = a_{n+\lambda}, y = b_{n+\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots n)$ oder $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots A_{2n}$ enthalten.

Unsere geometrische Lösung war folgende. Wir bestimmten n^2 Curven aus den Doppelverhältnifs-Gleichungen:

$$6)\quad (a_k a_{2n+1} a a_{n+\lambda}) = [A_{k+1} \ldots A_{k-1}](A_k, A_{2n+1}, \overset{k}{_{n+\lambda}}, A_{n+\lambda}).$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots n;\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots n)$$

Dem Strahle $x = a$ gehörte die gemeinsame Curve der n Netze

$[A_2 \ldots A_n]^{1}_{n+\lambda} [A_3 \ldots A_n A_1]^{2}_{n+\lambda} \ldots [A_1 A_2 \ldots A_{n-1}]^{n}_{n+\lambda}$ $\quad(\lambda = 1, 2, 3, \ldots n)$

zu. Die Gleichung von $[A_{k+1} \ldots A_{k-1}]^{k}_{n+\lambda}$ sei:

$$7)\quad f_n(y, x) - a_{k\lambda} f_n^{(k)}(y, x) = 0.$$

Die Gleichung der Curve $[A_{k+1} A_2 \ldots A_{k-1}] A_{n+\lambda}$ ist:

$$f_n(y, x) - \frac{f_n(b_{n+\lambda}, a_{n+\lambda})}{f_n^{(k)}(b_{n+\lambda}, a_{n+\lambda})} f_n^{(k)}(y, x) = 0.$$

Aus der Doppelverhältnifs-Gleichung 6) ergiebt sich daher

$$\frac{a - a_k}{a - a_{2n+1}} \cdot \frac{a_{n+\lambda} - a_{2n+1}}{a_{n+\lambda} - a_k} = a_{k\lambda} \cdot \frac{f_n^{(k)}(b_{n+\lambda}, a_{n+\lambda})}{f_n(b_{n+\lambda}, a_{n+\lambda})}.$$

7) geht also über in

$$f_n(y, x) f_n^{(k)}(b_{n+\lambda}, a_{n+\lambda})(a - a_{2n+1})(a_{n+\lambda} - a_k)$$
$$- f_n^{(k)}(y, x) f_n(b_{n+\lambda}, a_{n+\lambda})(a - a_k)(a_{n+\lambda} - a_{2n+1}) = 0,$$

und die gesuchte Curve gehört den n Netzen $(n-1)$ter Stufe

$$(a - a_{2n+1}) f_n(y, x) \sum_{k=1}^{n} c_{\lambda k}(a_{n+\lambda} - a_k) f_n^{(k)}(b_{n+\lambda}, a_{n+\lambda})$$
$$- (a_{n+\lambda} - a_{2n+1}) f_n(b_{n+\lambda}, a_{n+\lambda}) \sum_{k=1}^{n} c_{\lambda k}(a - a_k) f_n^{(k)}(y, x) = 0$$
$$(\lambda = 1, 2, 3, \ldots n)$$

gleichzeitig an. Wenn wir nun alle $c_{\lambda k}$ gleich 1 setzen, so nimmt die λte der n Netzgleichungen wegen der Beziehungen 5) nach Abwerfung des Factors

$$(a_{n+\lambda} - a_{2n+1}) f_n(b_{n+\lambda}, a_{n+\lambda})$$

die Form

$$(a - a_{2n+1}) f_n(y, x) + \sum_{k=1}^{n} (a - a_k) f_n^{(k)}(y, x) = 0$$

an. Dies ist mithin die Gleichung der gemeinsamen Curve der n Netze. Also liefert unsere geometrische Methode wirklich die durch die gegebenen Punkte bestimmte Curve $(n+1)$ter Ordnung.

Noten.

Note 1 zu § 1. Vergl: „Beiträge zur Geometrie der Lage“ von K. G. Ch. von Staudt [St. B.]. Drei Hefte. Nürnberg, 1856—1860. [No. 116.]

Über von Staudt's Theorie des Imaginären sind mir folgende Schriften zugänglich geworden:

1) F. August, „Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie“. Programm-Abhandlung. Berlin, 1872.

2) J. Lüroth, „Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Darstellung und Erweiterung der v. Staudt'schen Theorie“. Mathematische Annalen [Math. Ann.], Bd. 8, S. 145.

In beiden Schriften wird die Gerade zweiter Art als Schnittlinie zweier imaginärer Ebenen oder als Verbindungslinie zweier imaginärer Punkte im Raume definirt, im Gegensatz zu von Staudt's Theorie. Die erste Arbeit bringt in sehr anschaulicher Weise die analytische und die geometrische Betrachtungsweise imaginärer Punkte einer reellen Geraden in Zusammenhang. Die Erweiterung in der zweiten Arbeit betrifft das Rechnen mit Würfen. So wird (§ 17, S. 200 ff.) dem Argand-Cauchy'schen Existenzbeweis für die Wurzeln einer Gleichung mit Hülfe des Rechnens mit Würfen eine geometrische Deutung gegeben.

Ein kürzerer Abrifs der zweiten Arbeit befindet sich in den Nachrichten von d. Königl. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen vom Jahre 1873.

3) R. Sturm, „Über die von Staudt'schen Würfe“. Math. Ann., Bd. 9, S. 333.

Es werden mehr geometrische Beweise, als es bei von Staudt geschieht, für die Associativät und Commutativität der Addition und Multiplication der Würfe geführt; aufserdem wird ein anderer Beweis dafür gegeben, dafs jeder complexe Wurf sich in der Form $u + iv$ darstellen läfst, wo u und v reelle Würfe sind.

4) O. Stolz, „Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie“. Math. Ann., Bd. 4, S. 416.

von Staudt's imaginäre Elemente werden auf analytisch-geometrischem Wege behandelt.

5) E. Schröder, „Über von Staudt's Rechnung mit Würfen und verwandte Processe“. Math. Ann., Bd. 10, S. 289.

Eine von der von Staudt'schen verschiedene Theorie der imaginären Elemente hat Herr F. Klein in der Schrift

6) „Zur Interpretation der complexen Elemente in der Geometrie". Göttinger Nachrichten, Jahrg. 1872, S. 373

aufgestellt. Es werden dort cyclisch-projectivische Gruppen, vorzugsweise von vier Elementen, zur Darstellung complexer Elemente in der Geometrie vorgeschlagen.

Die geometrische Ausführung dieser Theorie hat Herr J. Lüroth gegeben. Vergl.

7) „Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Zweite Abhandlung". Math. Ann., Bd. 11, S. 84.

Note 2 zu § 2a. St. B., No. 118 und 83.

Note 3 zu § 2b. St. B., No. 121.

Note 4 zu § 2b. St. B., No. 126.

Note 5 zu § 3. Wenn irgend ein imaginärer Fundamentalpunkt in der Ebene gegeben ist, so kann man jeden anderen imaginären Punkt durch seinen reellen Träger und den reellen Punkt der imaginären Geraden darstellen, die ihn mit ersterem Punkte verbindet, jede beliebige Gerade der Ebene aber durch ihren reellen Punkt und den Träger des Punktes, den sie mit einer festen vom Fundamentalpunkt ausgehenden Geraden gemeinsam hat. Herr St. Smith zeigt, daſs man mit so gegebenen imaginären Elementen alle diejenigen Constructionen linear ausführen kann, die bei Voraussetzung reeller Elemente der Construction linear sein würden. Vergl. die Abhandlung

„Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques etc.". Annali di matematica pura ed applicata, Serie II, Bd. 3, S. 112 u. 218. [première partie, Art. 3 und 4.].

Note 6 zu § 4. Geometrie der Lage von G. K. Ch. v. Staudt. Nürnberg, 1847. [G], No. 254.

Note 7 zu § 5. Man vergleiche wegen dieser Auflösung die Arbeit von Herrn Staudigl

„Construction eines Kegelschnittes, wenn derselbe durch imaginäre Punkte und Tangenten bestimmt wird". Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der K. Akademie d. Wissenschaften zu Wien [Wiener Ber.], Bd. 62, S. 607.

In ganz symmetrischer Weise löst v. Staudt die Aufgabe. Vergl. [G], No. 314.

Note 8 zu § 6. Ersetzt man B durch einen der unendlich fernen Kreispunkte, so gehen die Ketten in Kreise über, die über den Durchmessern AA_1, BB_1 beschrieben sind, und von ihren Schnittpunkten F, F_1 aus projicirt sich die Involution A durch je eine circulare.

Note 9 zu § 6. St. B., No. 50.

Note 10 zu den §§ 7—9. Aus der Einleitung (S. 14) geht hervor, daſs es gerechtfertigt ist, die Kegelschnitte, welche A und A^1 enthalten, als Ketten der zu A gehörenden Repräsentationsebene zu bezeichnen, und daſs unser Satz einen speciellen Fall der allgemeinen von Staudt'schen Definition der Projectivität bildet. Weil nach von Staudt's Definition zwei einförmige Gebilde projectivisch sind, wenn jedem Element des einen ein Element des anderen entspricht, überdies aber zwei homologe Würfe, was den Sinn anbelangt, von einerlei Art sind, und weil dabei insbesondere jeder Kette eine Kette entspricht, so ist der Satz auch in St. B., No. 245 ausgesprochen (vergl. Einleitung, S. 14).

Note 11 zu § 9. Wird wieder der Punkt A mit einem der Kreispunkte identificirt, so geht die Beziehung zwischen den Feldern A und A_1 in Inversion über.

Note 12 zu § 16. St. B., No. 218.

Note 13 zu den §§ 20 u. 21. St. B., No. 222.

Note 14 zu den §§ 24—26. Würde es nicht darauf ankommen, die Involutionen zweiter Ordnung projectivisch zu reihen, so hätten wir auch so verfahren können. Ist $C_1 C_2$ ein Paar der Involution $A_1 A_2, B_1 B_2$, so hat hat man

$$C_1 C_2 A_1 B_1 \barwedge C_2 C_1 A_2 B_2 \barwedge C_1 C_2 B_2 A_2,$$

woraus dann folgt, dafs C_1, C_2 die Doppelelemente zweier Reihen sind, in denen die Elemente zweier gegebener Paare kreuzweise einander zugeordnet werden. Man vergleiche St. B., No. 85 oder auch

M. Chasles, „Traité de Géométrie supérieure". Paris, 1852. [No. 259].

Der im Texte gegebene Beweis kommt, wie man bemerken wird, wesentlich auf die Steiner'sche Construction der Doppelstrahlen zweier projectivischer Büschel hinaus. Aus dieser Construction hat den Satz Herr Hossfeldt abgeleitet. Vergl.

„Construction des Kegelschnittes aus fünf zum Theil imaginären Curvenelementen". Inaug.-Dissertation. Jena, 1882. [Abschnitt 2].

Hier wird indessen der Schlufs von der projectivischen Aufreihung der Involutionspaare nicht gezogen. Wir geben aus Gründen, die später sich ergeben werden, diesem Reihungsprincip den Vorzug vor dem sonst angewendeten Princip, nach welchem z. B. eine Punktinvolution zur Reihe ihrer harmonischen Mittelpunkte bezüglich eines festen Pols projectivisch gesetzt werden kann, weil alle diese Reihen unter sich projectivisch sind. Einen eleganten Beweis für diese Thatsache giebt z. B. Herr B. Klein in der Arbeit

„Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde". Habilitationsschrift. Marburg, 1881. [Theil I, § 2.]

Die Fortentwickelung dieser Methode der Reihung auf Involutionen höherer Ordnungen erfordert eine rein geometrische Theorie der harmonischen Mittelpunkte aller Ordnungen einer geraden Gruppe von beliebig vielen (n) Punkten. Für $n = 3$ ist diese Aufgabe annähernd geometrisch gelöst von Herrn A. Milinowski in der Schrift

„Die Polaren der ebenen Curven III. Ordnung mit Doppelpunkten". Programm-Abhandlung. Tilsit, 1872.

Die geforderte Theorie fliefst unmittelbar ab aus der Polaren-Theorie der in drei Geraden zerfallenden Curven dritter Ordnuug. Dieselbe Theorie findet sich für Gruppen von vier Punkten angebahnt in desselben Verfassers Abhandlung

„Die harmonischen Mittelpunkte für ein System von vier Punkten in Bezug auf einen gegebenen Punkt als Pol". Zeitschrift für Mathematik und Physik [Zeitschr.], Bd. 20, S. 17.

Eine strenge Theorie der harmonischen Mittelpunkte liegt implicite in jeder Theorie, welche Punktgruppen als Ordnungsgebilde von Polarsystemen darzustellen lehrt. Insofern sind Herrn H. Thieme's Schriften

„Die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme". Zeitschr., Bd. 24, S. 221 u. 276,

„Die Flächen 3. O. als Ordnungsflächen von Polarsystemen". Math. Ann., Bd. 28, S. 133,

in welchen die genannte Aufgabe als Specialfall der entsprechenden über Curven und Flächen $n$ter Orduung gelöst wird, bereits hier anzuführen. Mit dem speciellen Gebilde der Punktgruppe beschäftigt sich Herr H. Wiener in der Arbeit

„Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen etc". Habilitationsschrift. Darmstadt, 1885.

Note 15 zu § 28. Wenn einer der beiden Kreispunkte für beide Ebenen A und B das Centrum ist, so sind sie in den kleinsten Theilen ähnlich. Es ist dieser Fall der conformen Abbildung nach der reinen Kreisverwandtschaft, wie es scheint, der erste, welcher eine rein geometrische Behandlung erfährt. Nach analytischer Methode hat die betrachtete Verwandtschaft sehr zahlreiche und ausführliche Behandlungen gefunden.

Note 16 zu § 32. Als ein nicht gering anzuschlagender Vortheil der gegebenen Definition wird es betrachtet, dafs sie die Entstehung der Involution $n$ter Ordnung aus solchen niederer Ordnung in Evidenz setzt.

Bekanntlich hat Desargues die Involution $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$ von 6 oder 2.3 Punkten aus der Beziehung

$$a_1 c_1 \,.\, a_2 c_1 \,.\, b_1 c_2 \,.\, b_2 c_2 = a_1 c_2 \,.\, a_2 c_2 \,.\, b_1 c_1 \,.\, b_2 c_1$$

definirt, welche zwischen ihren Abständen obwaltet. An diese Beziehung hat Poncelet seine Definition der Involution à $3n$ points geknüpft. Zwei Punkte a und b sind nach ihm in Involution mit zwei Gruppen $p_1 p_2 \dots p_n$ und $q_1 q_2 \dots q_n$ von je n Punkten, wenn die Gleichung besteht

$$\frac{ap_1 \,.\, ap_2 \dots ap_n}{bp_1 \,.\, bp_2 \dots bp_n} = \frac{aq_1 \,.\, aq_2 \dots aq_n}{bq_1 \,.\, bq_2 \dots bq_n},$$

und drei Gruppen $p_1 p_2 \dots p_n, q_1 q_2 \dots q_n, r_1 r_2 \dots r_n$ von je n Punkten bilden eine Involution complète ou à $3n$ points, wenn

$$\frac{(p_1 q)}{(p_1 r)} = \frac{(p_2 q)}{(p_2 r)} = \frac{(p_3 q)}{(p_3 r)} = \dots \frac{(p_n q)}{(p_n r)}$$

ist, wobei unter $(p_\lambda q)$ das Product $p_\lambda q_1 \cdot p_\lambda q_2 \dots p_\lambda q_n$ zu verstehen ist. Vergl.

„Traité des propriétés etc". tome II. Paris, 1866. [section IV. Propriétés communes aux systèmes de lignes et de surfaces etc. (No. 271 ff.)].

Diese Definition ist nicht wesentlich verschieden von der analytischen Betrachtungsweise der Involution in der Form $f(x) - \lambda g(x) = 0$. An diese Gleichung knüpfte zuerst Herr E. de Jonquières seine Behandlungen. Vergl.

„Généralisation de la théorie de l'involution etc". Annali di matematica pura ed applicata. Serie I, Bd. 2, S. 86.

Seitdem befolgen viele Geometer den Gebrauch, für eine in die Betrachtung eintretende Involution höherer Ordnung die Gleichungsform $0 = f(x) - \lambda g(x)$ zu gebrauchen und erst, nachdem ihre wichtigsten Eigenschaften daraus abgeleitet sind, mit der geometrischen Behandlung einzusetzen.

Eine weitere Möglichkeit, Involutionen zu behandeln, liegt in der Betrachtung der Involutionscurven. Man untersucht bei Involutionen auf ebenen rationalen Curven die Hüllcurve der Geraden, welche irgend zwei derselben Gruppe angehörende Punkte verbinden, eine Curve, welche von der $(n-1)$ten Classe ist für die Involution $n$ter Ordnung auf einem Kegelschnitte. Vergl.

Em. Weyr, „Über Involutionen höherer Grade". Journal für die reine und angewandte Mathematik [Journal f. Math.], Bd. 72, S. 285.

Eine sehr ausführliche Behandlung der Involution dritter Ordnung nach diesem Princip giebt Herr Weyr in der Arbeit

„Grundzüge einer Theorie der cubischen Involution". Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag vom Jahre 1874. Sechste Folge, Bd. 7.

Auf derselben Grundlage beruht Herrn H. Wiener's Schrift

„Über Involutionen auf ebenen Curven". Inaug.-Dissertation. München, 1881.

So geeignet diese Methode zur genaueren Untersuchung der Involutionen ist, so wird sie doch unbrauchbar, soll man eine rein geometrische Theorie der Involutionen aufstellen. Wenn man nicht eine vollständige Theorie der Curven voraussetzt, kann sie zu brauchbaren Resultaten nur unter fortwährender Anwendung des Correspondenzprincips führen, wie es auch in den genannten Abhandlungen geschieht und in den zahlreichen Schriften, welche Herr Weyr über specielle Involutionen in den Wiener Berichten veröffentlicht hat.

Ferner kann man noch die Involutionen auf rationalen Curven als Schnitte von Curvenbüscheln studiren. So definirt Herr A. Milinowski in der Arbeit

„Zur Theorie der cubischen und biquadratischen Involution". Zeitschr. Bd. 19, S. 205.

die Involution dritter Ordnung in doppelter Weise: Erstens als Schnitt eines Kegelschnittes mit einem Kegelschnittbüschel, welches einen Grundpunkt auf dem ersteren hat, zweitens als Schnitt eines Strahlbüschels mit einer rationalen Curve dritter Ordnung. Unter Beiziehung der Polarentheorie unternimmt Herr Milinowski zu zeigen, dafs ein beliebiges Büschel von Curven dritter Ordnung auf einer jeden Geraden eine Involution dritter Ordnung ausschneidet; von der Untersuchung ist aber nicht immer das Correspondenzprincip fern gehalten.

Die Involution vierter Ordnung wird als Schnitt eines Kegelschnittbüschels mit einem beliebigen festen Kegelschnitt definirt, ferner als Schnitt eines Strahlbüschels mit einer Curve vierter Ordnung mit dreifachem Punkt. Es wird von speciellen Büscheln von Curven vierter Ordnung gezeigt, dafs sie eine Gerade in Involutionen vierter Ordnung treffen müssen, und von jedem allgemeinen Curvenbüschel dritter Ordnung, dafs es einen durch zwei Grundpunkte gelegten Kegelschnitt in einer Involution schneidet.

Hier ist endlich das in der Note 14 Gesagte zu vergleichen.

Note 17 zu § 41. Die drei Involutionen $A_1 \dots A_{n-m}, B_1 \dots B_{n-m}$; B_{n-m+1}, A_{n-m+1}; $A_{n-m+2} \dots A_{n+1}, B_{n-m+2} \dots B_{n+1}$ werden in trilineare Beziehung gesetzt ganz so, wie es für einförmige Gebilde von Hrn. B. Klein a.a.O., § 10 (Note 14) geschieht. Solche specielle Gebilde kommen bei der gesonderten Behandlung der Involutionen dritter Ordnung vor, die im § 31 auszugsweise gegeben wird. Die sechs Gruppen und Elemente $A_1 \dots A_{n-m}$; A_{n-m+1}; $A_{n-m+2} \dots A_{n+1}$; $B_1 \dots B_{n-m}$; B_{n-m+1}; $B_{n-m+2} \dots B_{n+1}$, und im § 31 die sechs Elemente A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, sind nichts Anderes als die singulären Elemente der trilinear bezogenen Reihen nach Herrn Schubert's Bezeichnung. Vergl. § 2 der Abhandlung

„Die trilineare Beziehnng zwischen drei einstufigen Grundgebilden". Math. Ann., Bd. 17, S. 457.

Zwischen n in einander liegenden einförmigen Gebilden kann man eine symmetrische $n$fach lineare Beziehung einleiten. Von jeder Gruppe zusammengehöriger Elemente kann man $n-1$ beliebige den $n-1$ ersten einförmigen Gebilden zuweisen, das $n$te entspricht denselben im letzten Gebilde. Man kann dann annehmen, dafs auf solche Weise ein Polarsystem $n$ter Ordnung entsteht, welches, was freilich nur im speciellen Falle $n=3$ erwiesen ist, durch sein Ordnungsgebilde, seine $n$fachen Elemente, bedingt ist. Jedes Element irgend einer Gruppe ist die gemischte Polare der $n-1$ übrigen Elemente derselben. Während Herrn H. Thieme a. a. O. (Note 14) hauptsächlich der Nachweis beschäftigt, dafs Polarsysteme beliebig hoher Ordnung möglich sind, geht Herr H. Wiener a. a. O (Note 14), und im speciellen Falle Herr B. Klein, hauptsächlich darauf aus, ein einmal gegebenes Polarsystem nun auch auf möglichst einfache Art zu bestimmen.

Note 18 zu § 43. In der Abhandlung

„Zur Vervollständigung der Involutionen höherer Ordnung". Wiener Ber., Bd. 61_2, S. 600

knüpft Herr Em. Weyr an die Definition der Involution durch ein Büschel von Curven $n$ter Ordnung mit einem $(n-1)$fachen Punkt an. Für den allgemeinen Fall braucht Herr Weyr eine algebraische Grundlage. Dafs ein Element nur einer Gruppe einer Involution $n$ter Ordnung angehört, und diese Gruppe höchstens n Elemente enthält, zeigt Hr. Thieme a. a. O., § 7 (Note 14).

Note 19 zu § 51. Hieran lassen sich leicht die cyclischen Involutionen des Herrn Lüroth (vergl. a. a. O., Note 1, 7) anknüpfen. Sollen zwei projectivische Reihen cyclisch-projectivische Gruppen

$$A_1 A_2 \dots A_n\,,\ B_1 B_2 \dots B_n\,,\ C_1 C_2 \dots C_n\,, \dots$$

zulassen, so müssen sie getrennte Doppelelemente D_1, D_2 besitzen. Die Involution D_1^n, $A_1 A_2 \dots A_n$ mufs mit ihrer entsprechenden, wenn man $D_1 A_1 D_2 \dots \barwedge D_1 A_2 D_2 \dots$ setzt, zusammenfallen; beide können sich von einander nur durch die Anordnung unterscheiden, weil sie zwei Gruppen D_1^n und $A_1 A_2 \dots A_n$ entsprechend gemeinsam haben, und auch dies nicht, weil D_2 eine dritte sich selbst entsprechende Gruppe bestimmt. Die Involution enthält daher alle cyclisch-projectivischen Gruppen, welche den beiden Reihen angehören, und aus Gründen der Symmetrie auch das $n$fache Element D_2^n. Jede cyclische Involution ist also eine solche mit zwei $n$fachen Elementen nach unserer Definition. Dasselbe beweist Herr Wiener a. a. O. (Note 16) durch Betrachtung der Involutionscurve einer auf einem Kreise gelagerten cyclischen Involution.

Note 20 zu § 62. Der Beweis läfst sich folgendermafsen führen. Man lasse zwei Personen von B_1 und A_1 aus auf einem von zwei nahen Bögen, die sich nur in diesen Punkten treffen, fortschreiten, bis sie sich in irgend einem Punkte C begegnen. Liegt dann der zweite Zug der einen zur linken Seite, so liegt er, weil beide Personen sich ansehen, der anderen zur rechten Seite. Weil aber beide Curven sich nur in A_1 und B_1 treffen, so mufs die zweite Curve während der ganzen Bewegung zur linken Hand der ersten und zur rechten Hand der anderen Person liegen. Die erste Person mufs daher in A_1 sich nach links drehen, um die Tangentenrichtung der zweiten Curve vor sich zu haben, die andere mufs sich in B_1 zu demselben Zwecke um einen kleinen Winkel nach rechts drehen. Mithin drehen Strahlen, die die beiden Winkel zwischen den Tangentenpaaren in A_1 und B_1 durchmessen, sich in entgegengesetzten Richtungen.

Note 21 zu § 67. Es läfst sich sehr leicht zeigen, dafs die Ketten des Büschels $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}, B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$, sowie auch die der Schaar $A_1 A_2 \ldots A_{n+1} \circ B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$ im Sinne der analytischen Geometrie je einem Büschel angehören. Sind Φ und Φ^1 die beiden unendlich fernen Kreispunkte, so zerfällt eine Curve des ersten Büschels in die Geraden

$$A_1\Phi, A_2\Phi, \ldots A_{n+1}\Phi, B_1\Phi^1, B_2\Phi^1, \ldots B_{n+1}\Phi^1,$$

eine zweite in die Geraden

$$B_1\Phi, B_2\Phi, \ldots B_{n+1}\Phi, A_1\Phi^1, A_2\Phi^1, \ldots A_{n+1}\Phi^1.$$

Von dem zweiten Büschel bestehen zwei Curven aus je den Strahlen

$$A_1\Phi, A_2\Phi, \ldots A_{n+1}\Phi, A_1\Phi^1, A_2\Phi^1, \ldots A_{n+1}\Phi^1;$$

$$B_1\Phi, B_2\Phi, \ldots B_{n+1}\Phi, B_1\Phi^1, B_2\Phi^1, \ldots B_{n+1}\Phi^1.$$

Note 22 zu § 71. Sollte die Gruppe, welche $U_1 V W \ldots$ und $V_1 U W \ldots$ noch gemeinsam ist, Doppelelemente zeigen, so kann man an die Stelle der letzteren Reihe eine andere nahe treten lassen, $V_1 U' W \ldots$, welche mit der ersteren neben W eine Gruppe W_1' von n verschiedenen Elementen gemeinsam hat; W_1' liegt unbedingt sowohl mit U_1, V_1 als mit U', V in je einer Involution. Daher mufs an der Grenze, wenn U' sich U nähert, auch W_1' sich einer U, V und U_1, V_1 gemeinsamen Gruppe W_1 nähern.

Note 23 zu § 77. Den umgekehrten Weg, wie es in der Arbeit geschieht, hat Herr B. Klein für das Involutionsnetz zweiter Stufe eingeschlagen (a. a. O., Note 14). Die Gesammtheit aller Tripel eines trilinear-symmetrischen Elementargebildes bildet das Tripelnetz, welches sich mit unserem Involutionsnetz dritter Ordnung und zweiter Stufe deckt. Wenn es sich um Punkttripel auf einem Kegelschnitt handelt, so giebt jedes Tripel zu einem Dreieck sie verbindender Geraden Veranlassung. Für eine Involution des Tripelnetzes sind diese Dreiecke einem Kegelschnitt umschrieben.

Note 24 zu § 81. Das betrachtete Involutionsnetz μter Stufe ist nahe verwandt mit Poncelet's involution à $(\mu + 2)m$ points. Vergl. No. 288 a. a. O. [Note 16]. Herr Em. Weyr bezeichnet das Gebilde als eine Involution $m$ten Grades und μter Stufe. Vergl.

„Über Involutionen $n$ten Grades und $k$ter Stufe“. Wiener Ber., Bd. 79_2, S. 680.

Herr Weyr betrachtet die Gruppengebilde, die durch Curvennetze auf rationalen ebenen Curven, durch Flächennetze auf rationalen Raumcurven ausgeschnitten werden.

Die allgemeinen Sätze, welche wir über Involutionsnetze aufgestellt haben, lassen sich auf alle linearen Systeme anwenden. Vergl.

W. K. Clifford, „On the Classification of Loci“. Philosophical Transactions etc., Bd. 169, S. 663,

wo unter locus eine gesetzmäfsige Zusammenstellung von Punktgruppen, Strahlengruppen, Curven, Flächen, kurzum von Gebilden, die sich parametrisch reihen lassen, verstanden wird.

Man kann dieselben Eigenschaften als solche eines $n$dimensionalen Raumes darstellen. In dieser Form giebt sie Herr G. Veronese in der Arbeit

„Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen etc“. Math. Ann., Bd. 19, S. 161.

Note 25 zu § 86. Für den besonderen Fall des Netzes zweiter Stufe hat Herr F. Schur den Satz bewiesen und erweitert. Ich befinde mich mit ihm aber in

der Bezeichnung in Widerspruch, indem nach Herrn Schur's Vorgang anstatt „Schaar" „Büschel" collinearer Netze zu schreiben wäre. Zur Begründung dieser Abweichung diene die unverkennbare Analogie der betreffenden Gebilde mit den Regelschaaren des Raumes, sowie der Umstand, dafs nicht sowohl die Netze selbst, sondern die Collineationen, deren Träger sie sind, in's Auge gefafst werden müssen.

Ein Büschel bilden die collinearen Bündel, welche die Secanten einer Raumcurve dritter Ordnung von ihren Punkten aus projiciren. Die verschiedenen Erzeugungsweisen der Flächen dritter Ordnung und specieller, von ihm neu eingeführter Raumcurven sechster und Flächen vierter Ordnung führen Herrn Schur auf Netze und Gebüsche collinearer Ebenenbündel und räumlicher Systeme. Vergl. §§ 7 und 12 der Arbeit

„Über die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen". Math. Ann., Bd. 18, S. 1.

Die angezogenen Hülfssätze über Curven und Flächen dritter Ordnung finden sich in Herrn Reye's Buch

„Die Geometrie der Lage", Bd. 2. Zweite Auflage. Hannover, 1880. [Vortrag 24.]

Später hat Herr Schur den Satz durch Projection ausgedehnt auf die collinearen Punktfelder, die in einem beliebigen Raume $n$ter Dimension liegen. Vergl.

„Über die Construction der Flächen $n$ter Ordnung". Math. Ann., Bd. 23, S. 437.

Note 26 zu § 87. Auf die Analogie zwischen Kegelschnitt-Theorie und derjenigen zweiwerthiger algebraischer Functionen einer Veränderlichen macht Hesse aufmerksam in der kurzen Note

„Ein Übertragungsprincip". Journal f. Math., Bd. 66, S. 15.

Es wird jeder Geraden der Ebene das Strahlenpaar zugeordnet, welches sich mit ihm auf einem festen Kegelschnitt schneidet und von einem festen Punkt O desselben ausgeht. Jedem Strahlbüschel gehört so eine Involution zu, und die Sätze der Ebene können in solche über Involutionen umgeschrieben werden. Der Reihe der Tangenten eines Kegelschnittes entspricht ein Gebilde, von dem je zwei Paare einen Strahl enthalten. Dieser Eigenschaft wegen wird es als Involution zweiter Ordnung bezeichnet. Da aber seit 1866 das Wort „Ordnung" seine Bedeutung verändert hat, mufste statt des Beisatzes „zweiter Ordnung" ein anderer „zweiten Ranges" gewählt werden.

Auf dasselbe Übertragungsprincip verweist Hesse in der Note

„Zur Involution". Journal f. Math., Bd. 63, S. 179.

Note 27 zu § 88. Dieser Satz ist analog dem, nach welchem zwei projectivische Kegelschnitte homologe Gebilde collinearer Ebenen sind.

Note 28 zu § 99. Nach der übereinstimmenden Definition Clifford's und Herrn G. Veronese's (Note 24) ist die Involution μten Ranges nichts Anderes als eine durch einen besonderen Raum μter Dimension erstreckte rationale Raumcurve μter Ordnung.

Wir beziehen öfters die Beweise des dritten Abschnittes nur auf den besonderen Fall der aus Punktgruppen einer Geraden bestehenden Involution μten Ranges, während die Lehrsätze allgemein gelten und gehalten sind.

Note 29 zu § 106. Ganz so entstehen bei Herrn G. Veronese und bei Clifford die in einem Theilraume erstreckten rationalen Raumcurven μter Ordnung aus den allgemeinen, oder in einem gegebenen Raume rationale Curven von höherer Ordnung, als seine Dimension anzeigt.

Note 30 zu § 122. Über die zwei-zweideutig bezogenen Grundgebilde kann man zwei Aufsätze des Herrn Em. Weyr zu Rathe ziehen.

„Die Erzeugung der Curven dritter Ordnung mittelst symmetrischer Elementensysteme zweiten Grades". Wiener Ber., Bd. 69_2, S. 784.

Jedes Paar des symmetrischen Elementensystems wird auf einem Kegelschnitt durch eine Tangente eines anderen ausgeschnitten, die Curve aber durch Strahlbüschel erzeugt, welche die beiden Systeme von zwei Punkten des ersteren aus projiciren.

„Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde". Leipzig, 1869.

Note 31 zu § 126. Einen geometrischen Beweis dafür, dafs Kegelschnitte sich zu Netzen zusammenschliefsen, gab zuerst von Staudt. Vergl. St. B., No. 351.

Wenn A, B, C, D die Punkte sind, welche zwei Kegelschnitten der Büschel K_1, K_3 und K_2, K_3 gleichzeitig angehören, so gehört z. B. das Punktepaar AB mit allen drei Paaren, die AB auf K_1, K_2, K_3 ausschneidet, zu einer Involution; daher befinden sich A, B, C, D auch auf einem Kegelschnitt des Büschels K_1, K_2. Schwierigkeiten sind zu überwinden, wenn A, B, C, D nicht getrennt liegen.

Note 32 zu § 128. Auf die hohe Wichtigkeit des von uns mit „Schaar projectivischer Kegelschnittbüschel" bezeichneten Gebildes hat zuerst Herr H. Kortum hingewiesen. Vergl.

„Über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades. Zwei Abhandlungen etc." Bonn, 1869.

Im § 4 der zweiten Abhandlung findet sich der Satz über Schaaren von Kegelschnittbüscheln aufgestellt, der jedoch der analytischen Geometrie entlehnt wird. Ganz so, wie Herr Kortum die Kegelschnittschaar zur Herstellung des Büschels von Curven vierter Ordnung verwendet, so wird bei uns (§ 148) der allgemeine Schaarsatz zur Definition der Büschel überhaupt dienen.

Note 33 zu den §§ 143—147. Die unendlich vielfache Erzeugbarkeit der Curven.

Die „Tripelcurve" dritter Ordnung kann auf unendlich viele Arten durch ein Strahlbüschel und ein projectivisches Kegelschnittbüschel erzeugt werden; das Centrum des Strahlbüschels ist auf der Tripelcurve willkürlich; sein conjugirter Punkt und irgend ein Tripel können in die zugehörige Basis aufgenommen werden. Vergl. § 63, S. 507 von

(1) „Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie", Bd. 2, herausgegeben von Herrn H. Schröter. Zweite Auflage. Leipzig, 1870.

Von hier aus sucht Herr A. Milinowski die verschiedenen Erzeugungsweisen der allgemeinen Curve dritter Ordnung zu gewinnen, indem er erst nachweist, dafs zu einem Centrum S auf der Tripelcurve als Basis des Kegelschnittbüschels jede beigeordnete Rest-Gruppe genommen werden kann, und indem er alsdann die allgemeine Curve dritter Ordnung mit der Tripelcurve zu identificiren versucht. Vergl. die Schrift

(2) „Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven dritter Ordnung". Zeitschr., Bd. 21, S. 427.

Ferner handelt über den gleichen Gegenstand desselben Verfassers Arbeit

(3) „Synthetischer Beweis des Satzes, dafs jede ebene Curve dritter Ordnung etc". Zeitschr., Bd. 23, S. 327.

(4) Für die Identität der Tripelcurve und des Erzeugnisses eines Strahlbüschels mit einem projectivischen Kegelschnittbüschel liefert einen strengeren Beweis, als es a. d. a. O. geschehen war, Hr. F. Schur. Zeitschr., Bd. 24, S. 119.

(5) Von hoher Wichtigkeit für die Theorie der Curve dritter Ordnung sind die Entwickelungen, die Herr Th. Reye im 24sten und 25sten Vortrage des zweiten Bandes seiner „Geometrie der Lage" giebt.

Für die allgemeine Erzeugung der Curven durch projectivische Büschel sind von Bedeutung Herrn A. Milinowski's Abhandlungen

(6) „Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven vierter Ordnung". Zeitschr., Bd. 23, S. 85 und 211,

in welchen der in den §§ 143ff. der vorliegenden Arbeit durchgeführte Procefs, welcher von den verschiedenen Erzeugungsweisen der Curven $n$ter Ordnung aus unter Benutzung einer Schaar projectivischer Büschel aus Curven $(n-1)$ter Ordnung zum Büschel, von da zum Curvennetz, von da endlich zur Büschelschaar führt, für Curven vierter und fünfter Ordnung dargelegt wird, jedoch mit nicht immer rein geometrischen Mitteln. Als Schlufsresultate werden einige der Lehrsätze der §§ 129—138 über Curven $n$ter Ordnung hingestellt. Doch berechtigt die sehr specielle und complicirte Behandlung schon der Curven vierter Ordnung Herrn A. Milinowski keinesweges zur Aufstellung so allgemeiner Sätze. In den §§ 143—147 findet man eine wesentlich vereinfachte und, wie ich hoffe, strenge Darlegung der bezüglichen Lehrsätze. Der Grundgedanke der ganzen Entwickelung ist Herrn Kortum zuzuschreiben. Vergl. Note 32.

Note 34 zu § 148. Diese Methode, ein Curvenbüschel zu definiren, geht auf M. Chasles zurück, der ein Büschel von Curven dritter Ordnung durch ein festes Kegelschnittbüschel und Strahlbüschel erzeugt, welche zu demselben Kegelschnitt perspectivisch sind. Vergl.

„Note sur les courbes de troisième ordre concernant les points d'intersection etc". Comptes rendus etc., Bd. 41, S. 1190.

Vergl. auch die Entwickelungen der Herren Milinowski und Kortum a. d. a. O. (Noten 33, 6 und 32).

Note 35 zu § 155. Es ist dies der Jacobi'sche Satz. Vergl. Journal f. Math., Bd. 15, S. 285.

Note 36 zu § 156. Es ist dies der Cayley'sche Satz. Vergl. The Cambridge Mathematical Journal etc., Bd. 3, S. 211.

Note 37 zu § 160. Die Theorie der Polaren der Curven dritter Ordnung behandelt Herr Milinowski aufser a. a. O. (Note 14) noch im zweiten Theil der unter (2) in der Note 33 angeführten Abhandlung. Die Polaren von Curvenpunkten ergeben sich unmittelbar aus den verschiedenen Erzeugungsmethoden der Curven dritter Ordnung, und hieraus wird auf die Polaren anderer Punkte geschlossen.

Aus der Theorie der „harmonischen Polarcurve" wird die Polarentheorie abgeleitet in der Abhandlung

„Zur Polarentheorie der Curven und Flächen dritter Ordnung". Journal f. Math., Bd. 89, S. 136.

Lehrsätze über die Polarentheorie der Curven vierter Ordnung stellt Herr Milinowski a. a. O. (Note 33, 6) auf, wobei wieder für Curvenpunkte die Polare mit Hülfe derer eines Büschels von Curven dritter Ordnung erzeugt wird und daraus auf die eines Punktes aufserhalb der Curve geschlossen wird.

Das Allgemeine eines solchen Schlusses von $n - 1$ auf n hat Herr Schur entwickelt in der Abhandlung

„Eine geometrische Ableitung der Polareigenschaften ebener Curven". Zeitschr., Bd. 22, S. 220.

Hier sind wiederum Herrn H. Thieme's Arbeiten anzuführen (Note 14).

Die von uns gegebene Entwickelung knüpft an eine kurze Note des Herrn A. Beck in Riga an. Vergl.

„Zur allgemeinen Theorie der Curven und Flächen". Math. Ann., Bd. 14, S. 207.

Note 38 zu § 168. Diese Beweismethode befolgt M. Chasles a. a. O., (Note 34); fernere Beispiele für sie finden sich im § XI, No. 55 von Herrn E. de Jonquières,

„Essai sur la génération des courbes géométriques etc". Mémoires présentés par divers savants etc., Bd. 16, S. 159.

Note 39 zu § 168. Vergl., wie überhaupt für die analytische Seite der hier behandelten Theorien, den Aufsatz der Herren Brill und Nöther

„Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie". Math. Ann., Bd. 7, S. 269.

Note 40 zu § 173. H. Grafsmann's Arbeiten über die ebenen Curven sind die folgenden

„Grundzüge zu einer rein-geometrischen Theorie der Curven, mit Anwendung einer rein-geometrischen Analyse". Journal für Math., Bd. 31, S. 111.

„Über die Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch gerade Linien etc.". ibidem, Bd. 36, S. 177.

„Der allgemeine Satz über die Erzeugung aller algebraischen Curven durch Bewegung gerader Linien". ibidem, Bd. 42, S. 187.

„Die höhere Projectivität und Perspectivität in der Ebene; dargestellt durch geometrische Analyse". ibidem, Bd. 42, S. 193.

„Die höhere Projectivität der Ebene; dargestellt durch Functionsverknüpfungen". ibidem, Bd. 42, S. 204.

„Erzeugung der Curven vierter Ordnung durch Bewegung gerader Linien". ibidem, Bd. 44, S. 1.

„Die lineale Erzeugung von Curven dritter Ordnung". ibidem, Bd. 52, S. 254.

Note 41 zu § 176. Ähnliche Entwickelungen finden sich bei Herrn Wiener a. a. O. (Note 14).

Note 42 zu § 178. Vergl. wegen dieser Fassung des Problems Herrn E. de Jonquières' Essai (Note 40), No. 15ff. Von den Grundpunkten zweier erzeugender Büschel $n$ter und n'ter Ordnung hat man noch $nn' - 1$ wesentliche zu bestimmen, wenn sie eine durch $\frac{(n+n')(n+n'+3)}{2}$ gegebene Punkte gehende Curve $(n+n')$ter Ordnung erzeugen sollen; hier ist $n = 1$ und $n' = n$ zu setzen. Alle unbekannten Basispunkte sind in die zweite Basis verlegt.

Unser Verfahren ist nicht wesentlich von dem Kortum'schen verschieden. Kann man für beliebige Punkte $C_1, C_2, \ldots C_{n-m}, A_{n-2m+1}, \ldots A_{2n+1}$ die Aufgabe lösen

$$[C_1 C_2 \ldots C_{n-m} \ldots] \, (A_{n-2m+1} \ldots A_{2n+1}) \;\bar{\wedge}\; a_{n-2m+1} \ldots a_{2n+1},$$

wo die ... hinter C_{n-m} $m-1$ abhängige Punkte bedeuten, so setzt man

$[C_1 C_2 \dots C_{n-m-1} A_{n-2m+1} \dots] (A_{n-2m} A_{n-2m+2} \dots A_{2n+1}) \,\overline{\wedge}\, a_{n-2m} a_{n-2m+2} \dots a_{2n+1}$
und andererseits
$[C_1 C_2 \dots C_{n-m-1} A_{n-2m} \dots] (A_{n-2m+1} A_{n-2m+2} \dots A_{2n+1}) \,\overline{\wedge}\, a_{n-2m+1} a_{n-2m+2} \dots a_{2n+1}$.
Alle Curvenbüschel der durch die beiden links stehenden Büschel bestimmten Schaar haben die Beziehung zu befriedigen

$$[C_1 \dots C_{n-m-1} \dots] (A_{n-2m} A_{n-2m+1} \dots A_{2n+1}) \,\overline{\wedge}\, a_{n-2m} a_{n-2m+1} \dots a_{2n+1};$$

ein Büschel der Schaar genügt daher der Forderung

$$[C_1 \dots C_{n-m-1} \dots] (A_{n-2m-1} A_{n-2m} \dots A_{2n+1}) \,\overline{\wedge}\, a_{n-2m-1} a_{n-2m} \dots a_{2n+1};$$

so weiter schliefsend erhält man die Gewifsheit, dafs sich durch $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ Punkte im Allgemeinen eine und nur eine Curve $(n+1)$ter Ordnung legen läfst. Vergl. die Entwickelungen der Herren Kortum und Milinowski a. d. a. O. (Noten 32 und 33, 6).

Eine hiervon verschiedene Methode der Curvenerzeugung giebt Hr. G. Härtenberger im 58sten Bande des Journals für Math. Doch wird diese Arbeit illusorisch wegen eines auf S. 58 gemachten Fehlers, den bereits Herr Kortum bemerkt hat.

Wie man bei der Construction algebraischer Flächen zu verfahren hat, zeigt Herr Fr. Schur a. a. O. (Note 25).

Note 43 zu § 179. Eine ausführliche Darstellung des Zusammenhanges zwischen v. Staudt's Imaginären-Theorie und der Betrachtungsweise der analytischen Geometrie findet sich in der Abhandlung des Herrn Stolz. Vergl. Note 1.

Note 44 zu § 179. Diese Entwickelung giebt Herr F. August a. a. O. (Note 1).

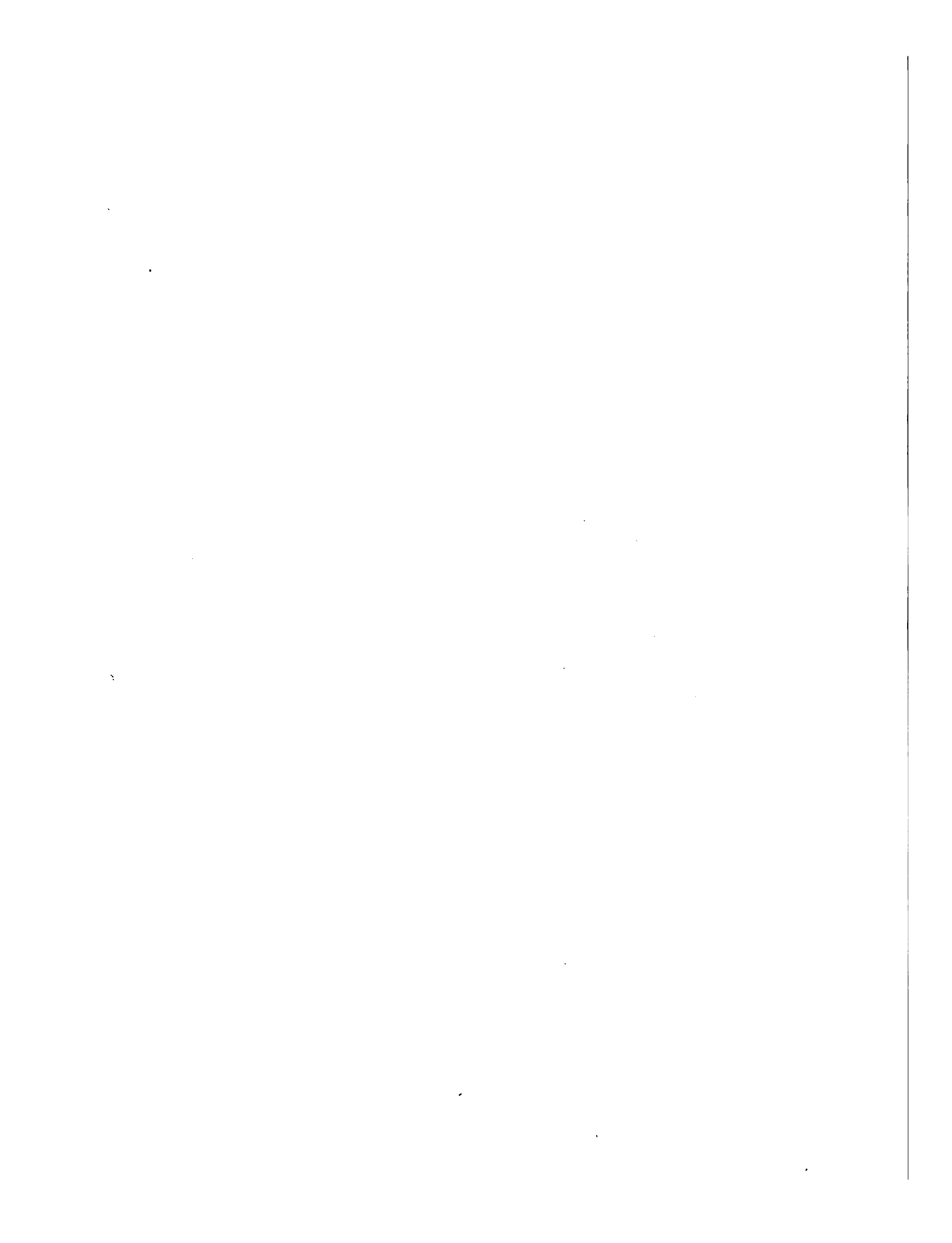
Berichtigungen.

S. 33, Z. 1 v. o. hinter „A" schalte ein „[oder von β^1 und A^1, wo dann ganz analog zu schliefsen wäre]".
S. 33, Z. 2 v. u. hinter „aber" schalte ein „wenn Γ im Unendlichen liegt".
S. 37, Z. 2 v. u. statt „Punkte" lies „Punktfolgen".
S. 40, Z. 14 v. u. statt „sie" lies „J_1 und $\mathfrak{J}_2$".
S. 74, Z. 8 u. 9 v. o. sind die oberen Striche zu tilgen.
S. 103, Z. 7 v. o. fallen die Worte „durch Ketten" fort.
S. 105, Z. 4 v. u. statt „diese" lies „U und V".
S. 141, Z. 1 v. o. hinter „Y_α" schalte ein „der Involution".
S. 193, Z. 3 v. o. statt „beliebigen" lies „besonderen".
S. 264, Z. 2 v. o. statt „solches" lies „α faches" u. statt α lies $\alpha + 1$ in den Z. 8, 10, 12, 14.
S. 278, Z. 2 v. u. statt „$(m+n+r)\,\nu$" lies „$(n+r)\,\nu$".
S. 280, Z. 11 v. u. statt „$W q_0$" lies "W oder $W_1 q_0$".

Inhaltsverzeichnifs.

Buchdruckerei der Königl. Akademie der Wissenschaften (G. Vogt).
Berlin, Universitätsstr. 8.

3




3 2044 044 834 240